

Российский государственный университет
нефти и газа им.И.М.Губкина

Учебно-научный центр
довузовской подготовки

Центр дистанционного обучения

Кафедра физики

А.Черноуцан

профессор кафедры физики
заместитель главного редактора журнала « КВАНТ»

ФИЗИКА

**Учебно-справочное пособие
для старшеклассников и абитуриентов**

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Механика	5
§ 1. Кинематика	5
§ 2. Основы динамики	15
§ 3. Законы сохранения в механике	23
§ 4. Механика жидкостей и газов	32
Глава 2. Молекулярная физика. Тепловые явления	42
§ 1. Молекулярная физика	42
§ 2. Термодинамика	50
Глава 3. Электродинамика	69
§ 1. Электростатика	70
§ 2. Законы постоянного тока	88
§ 3. Магнетизм	102
Глава 4. Колебания и волны	111
§ 1. Механические колебания и волны	111
§ 2. Электромагнитные колебания и волны	118
Глава 5. Оптика и теория относительности	124
§ 1. Геометрическая оптика	124
§ 2. Основы волновой оптики	131
§ 3. Элементы теории относительности	135
Глава 6. Квантовая физика	139
§ 1. Световые кванты	139
§ 2. Атом и атомное ядро	141

Предисловие

Данное пособие предназначено не для первоначального изучения физики (для этого лучше использовать школьные учебники), а для подготовки к выпускным и вступительным экзаменам. В пособии содержится краткое, но достаточно полное и подробное изложение всех основных вопросов школьной программы, которое сопровождается многочисленными примерами, вопросами и замечаниями, поясняющими теоретический материал.

Разбиение пособия на главы и параграфы соответствует разделам программы вступительных экзаменов. Нумерация рисунков в книге сплошная, а формулы и примеры нумеруются отдельно внутри каждой главы. Книга снабжена подробным предметным указателем, что позволяет использовать ее в качестве справочника. Более сложный для восприятия материал напечатан петитом, и при первом чтении его можно пропустить. Отметим, однако, что изучение этого материала окажется весьма полезным абитуриентам физических вузов, а также учителям и преподавателям, настроенным на углубленное преподавание физики. Для дальнейшего более углубленного ознакомления с физикой рекомендуется активно работать с журналом «Квант» (особенно с разделами «Практикум абитуриента» и «Школа в «Кванте»») и с его приложениями.

Данное пособие построено так, чтобы подготовка к вступительным экзаменам стала для школьника одновременно и подготовкой к успешному изучению физики в институте, т.е. стремится сократить разрыв, прежде всего психологический, между «школьной» и «институтской» физикой. Опыт общения с читателями книги «Краткий справочник по физике» (авторы А.К.Цатурян, А.И.Черноуцан, редактор А.Д.Полянин), на основе которой создавалось данное пособие, показывает, что абитуриенты, успешно поступившие в избранный вуз, продолжают активно использовать этот справочник и на первом-втором курсах для быстрого повторения забытой школьной физики. Надеемся, что и данное пособие окажется вам полезным и как абитуриенту, и как будущему студенту.

В интернете помещена отредактированная автором версия книги, в 1999 и 2000 гг. выпущенной издательством «Эксмо-пресс». Рекомендуется работать не в режиме просмотра на мониторе, а с распечатанным на принтере вариантом. Для удобства перекачки

книга помещается как целиком, так и отдельными главами.

Желаем успехов!

Автор выражает благодарность члену редколлегии журнала «Квант» А.А.Леоновичу, прочитавшему рукопись и сделавшему много полезных замечаний.

Глава 1. Механика

§ 1. Кинематика

Механическим движением называется изменение положения тела по отношению к другим телам. Из определения видно, что механическое движение не абсолютно, а относительно.

► **Системы отсчета.** Система отсчета — это тело или совокупность тел, по отношению к которым рассматривается движение других тел. Система отсчета состоит из тела (или тел) отсчета, жестко связанной с ним (с ними) системы координат и системы измерения времени — часов. Одно и то же тело в различных системах отсчета движется по-разному. Например, в системе отсчета, связанной с самим телом, оно покоится, в других системах отсчета — движется.

► **Материальная точка.** Материальная точка — это тело, размерами которого в процессе движения можно пренебречь. Возможность рассматривать тело как материальную точку зависит не от самого тела, а от характера его движения. Например, при движении Земли вокруг Солнца Землю можно считать материальной точкой, если же нас интересует суточное вращение Земли, — то нельзя.

► **Траектория. Путь. Перемещение.** Положение материальной точки в момент времени t можно задать тремя координатами x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$, соединяющим с ней начало координат (рис. 1). В процессе движения материальная точка описывает пространственную кривую — траекторию. Движение точки полностью определяется заданием закона движения — трех функций $x(t), y(t), z(t)$ или, что то же самое, одной векторной функции $\vec{r}(t)$.

Путь — это длина участка траектории, пройденного точкой за определенный интервал времени. Путь — величина скалярная, т.е. не зависящая от выбора системы координат. Отметим также, что путь не может быть отрицательным и не может убывать со временем.

Перемещением материальной точки на интервале времени от момента t_1 до момента t_2 называется вектор $\vec{s}$, соединяющий начальное положение точки с конечным. Очевидно, что $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, т.е. перемещение равно разности радиусов-векторов точки в конечный и начальный моменты времени. Если начальный момент не указан, то перемещение отсчитывается от начала движения: $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор в начальный момент времени (при $t = 0$).

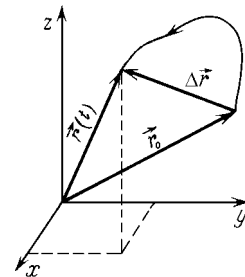


Рис. 1

► **Скорость.** Средней скоростью материальной точки на интервале времени от t_1 до t_2 называется отношение ее перемещения к интервалу времени: $\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta \vec{r} / \Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$.

Мгновенная скорость (или просто скорость) точки в момент времени t — это предел, к которому стремится средняя скорость при неограниченном уменьшении интервала времени:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Видно, что скорость $\vec{v}(t)$ представляет собой производную радиус-вектора или перемещения, рассматриваемых как функции времени t : $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \vec{s}'(t)$. Если тело движется по криволинейной траектории, то его скорость направлена по касательной к траектории. В СИ* координаты и перемещение тела выражаются в метрах, а время — в секундах. Поэтому скорость выражается в метрах в секунду (м/с).

Замечание. Иногда вводят среднюю скорость пути, определяемую как отношение пути к интервалу времени. Средняя скорость пути — величина скалярная. Во многих задачах рассматривается движение по прямой в одном направлении, в этом случае средняя скорость пути дает такой же ответ, как просто средняя скорость (которую иногда называют средней скоростью перемещения).

Пример 1. Вычислим среднюю скорость для движения по двум последовательным участкам, которые точка проходит с постоянными скоростями v_1 и v_2 . Рассмотрим два случая. В первом случае пусть точка половину всего времени движется с одной скоростью, а половину — с другой. Тогда

$$v_{\text{ср1}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1(t/2) + v_2(t/2)}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Во втором случае пусть точка изменяет свою скорость с v_1 до v_2 ровно в середине пути. Тогда

$$v_{\text{ср2}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{s/(2v_1) + s/(2v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Легко убедиться, что $v_{\text{ср1}} \geq v_{\text{ср2}}$. Второй из случаев призван продемонстрировать, сколь опасным является часто встречающееся заблуждение, что для вычисления средней скорости можно всегда применять формулу среднего арифметического.

► **Ускорение.** Ускорением материальной точки в момент времени t называется величина

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \vec{v}'(t),$$

т.е. производная мгновенной скорости $\vec{v}(t)$, рассматриваемой как функция времени t . Ускорение характеризует быстроту изменения

* СИ (система интернациональная) — сокращенное название Международной системы единиц, принятой в 1960 г. Генеральной конференцией по мерам и весам.

скорости тела. Из определения видно, что ускорение выражается в м/с^2 .

При *прямолинейном движении* материальной точки систему координат можно выбрать таким образом, чтобы движение происходило вдоль оси x . Движение при этом определяется координатой точки x и проекциями скорости $v_x = x'(t)$ и ускорения $a_x = v'_x(t)$ на эту ось. Перемещение точки за время t имеет вид: $s_x = x - x_0$, где x_0 — координата в начальный момент времени $t = 0$ (начальная координата).

Замечание. Изучение прямолинейного движения полезно не только потому, что это важный частный случай. *Криволинейное* движение точки по плоскости или в пространстве можно свести к двум или трем *прямолинейным* движениям — движениям проекций точки на координатные оси.

► **Равномерное движение.** При *равномерном* прямолинейном движении скорость точки постоянна: $v_x = \text{const}$. Координата точки x является первообразной v_x , т.е. линейной функцией времени t :

$$x = x_0 + v_x t, \quad \text{или} \quad s_x = v_x t.$$

При равномерном движении точка проходит равные отрезки пути за одинаковые промежутки времени.

График зависимости координаты точки от времени при равномерном прямолинейном движении изображается прямой. Наклон этой прямой зависит от величины и знака скорости.

► **Равноускоренное движение.** *Равноускоренное* (равнопеременное) прямолинейное движение — это движение, при котором ускорение точки постоянно: $a_x = \text{const}$. Скорость v_x является первообразной a_x и поэтому имеет вид:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad (1)$$

где v_{0x} — начальная скорость (в момент времени $t = 0$). Координата точки x является первообразной скорости и поэтому вычисляется по формуле

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

или, учитывая, что $s_x = x - x_0$, получаем формулу для перемещения за время t :

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (2)$$

На рис. 2 показаны графики зависимостей скорости и координаты точки от времени t при равноускоренном прямолинейном движении.

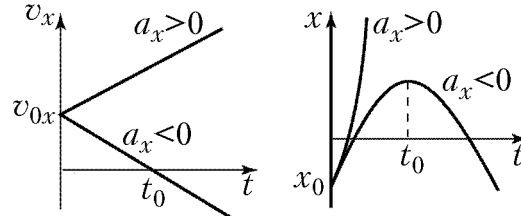


Рис. 2

Видно, что график $x(t)$ представляет собой параболу, характер выпуклости и положение вершины которой зависят от a_x и v_{0x} .

Формулы (1) и (2), описывающие зависимость скорости и перемещения от времени, позволяют в принципе решить любую задачу на равноускоренное движение. Однако часто решение существенно упрощается, если использовать одну из двух дополнительных формул, которые легко выводятся из двух основных. Так, вынося в уравнении (2) время t за скобки $s_x = (v_{0x} + a_x t/2)t$ и упрощая выражение в скобках (подставляя $a_x t = v_x - v_{0x}$ из уравнения (1)), получим

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2}t, \quad (3)$$

т.е. средняя скорость равноускоренного движения равна полусумме начальной и конечной скоростей. Эта формула имеет простой графический смысл: перемещение есть интеграл (первообразная) скорости, т.е. равняется площади под графиком $v_x(t)$ (площади трапеции).

Выражая время из формулы (1): $t = (v_x - v_{0x})/a_x$ и подставляя в (3), получаем еще одно полезное соотношение, выполняющееся при равноускоренном движении:

$$2a_x s_x = v_x^2 - v_{0x}^2. \quad (4)$$

Пример 2. При экстренном торможении автомобиля его колеса оставляют на асфальте след, по длине которого можно рассчитать скорость автомобиля в начале торможения. Для этого удобно использовать уравнение (4), в котором надо положить $v_x = 0$ (торможение до остановки): $2a_x s_x = 0 - v_{0x}^2$. Если, например, известно, что модуль ускорения на сухом асфальте равен $a = 5$ м/с², а длина следа оказалась равной $s = 20$ м, то получаем $v_0 = \sqrt{-2a_x s_x} = \sqrt{2as} \approx 14$ м/с ≈ 51 км/ч.

Замечание. Модуль любого вектора мы будем обозначать той же буквой, но без знака вектора: $v = |\vec{v}|$. (В случае одномерного движения буква без знака проекции обозначает модуль проекции: $v = |v_x|$.)

Пример 3. Посмотрим, как надо решать задачи на встречу двух тел. Провожающий хочет передать знакомому в поезде посылку; опаздывая к отходу поезда, он бежит вдоль перрона со скоростью v . В тот момент, когда ему осталось пробежать расстояние L , поезд трогается и начинает набирать скорость с постоянным ускорением a . Чтобы узнать, успеет ли провожающий передать посылку, запишем условие

встречи. Для этого удобно выбрать общую для двух тел систему координат, тогда в момент встречи координаты тел будут совпадать. Выберем начало координат в том месте, где находился провожающий в тот момент, когда тронулся поезд. Тогда зависимость координат провожающего и его знакомого от времени имеет вид: $x_1 = vt$, $x_2 = L + at^2/2$. Условие встречи $x_1 = x_2$ имеет вид квадратного уравнения, и провожающий догонит знакомого в том случае, если дискриминант этого уравнения неотрицателен: $v^2 - 2aL \geq 0$. (Правда, надо еще проверить, не добежит ли он до края платформы раньше желанной встречи.)

► **Свободное падение.** *Свободное падение* — это движение тела под действием силы земного притяжения в пренебрежении сопротивлением воздуха. Если расстояние, которое проходит тело в процессе движения, пренебрежимо мало по сравнению с радиусом Земли, то ускорение тела $\vec{a}$ можно считать постоянным по величине и направлению: $\vec{a} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ — *ускорение свободного падения*. У поверхности Земли $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$; на экваторе g немного меньше, чем на полюсе.

Если выбрать систему координат, в которой ось y направлена вертикально вверх, а ось x — горизонтально (в плоскости движения), то движение проекции материальной точки на ось y будет равноускоренным, а движение ее проекции на ось x — равномерным. Таким образом, в этой системе отсчета движение точки описывается четырьмя уравнениями ($a_y = -g$):

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{const}, \\ x = v_x t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt, \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где x, y — координаты точки; v_x, v_y — соответствующие проекции скорости $\vec{v}$; y_0 — координата y точки при $t = 0$ (x_0 считаем равным нулю); v_{0x}, v_{0y} — проекции начальной скорости $\vec{v}_0$.

Поскольку время t выражается через x линейно: $t(x) = x/v_x$, а y зависит от t квадратично, то, подставляя в зависимость $y(t)$ выражение $t(x)$, получаем, что зависимость $y(x)$ имеет вид квадратного трехчлена. Из этого следует, что траектория свободно падающего тела представляет собой параболу. (Ясно, что при $v_x = 0$ тело движется по вертикальной прямой.)

Рассмотрим несколько частных случаев.

С л у ч а й 1. Тело падает с высоты h без начальной скорости. Тогда $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$. В этом случае

$$v_y = -gt, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Время t , через которое тело достигнет поверхности Земли ($y=0$), можно найти из уравнения: $y = h - gt^2/2 = 0$. Отсюда получаем: $t = \sqrt{2h/g}$. Скорость тела в момент падения $v_y = -gt = -\sqrt{2gh}$.

С л у ч а й 2. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_{0y} = v_0$. В этом случае

$$v_y = v_0 - gt, \quad y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

При $t_1 = v_0/g$ тело остановится ($v_y = 0$) и, следовательно, достигнет в этот момент наивысшей точки полета. Подставляя в выражение $y = v_0 t - gt^2/2$ значение t_1 , получаем максимальную высоту $h = y(t_1) = v_0^2/2g$ (проще получить этот ответ из формулы (4)). Полное время полета t_2 в два раза больше, чем t_1 : $t_2 = 2v_0/g$.

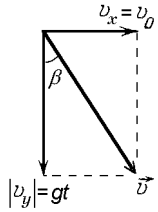


Рис. 3

С л у ч а й 3. Тело брошено горизонтально со скоростью v_0 с высоты h . В этом случае

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ x = v_0 t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = -gt, \\ y = h - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

т.е. движение тела складывается из равномерного перемещения вдоль оси x и падения с высоты h , рассмотренного в случае 1. Скорость тела в любой момент времени равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

и образует с ускорением $\vec{g}$ угол, тангенс которого равен (рис. 3)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{v_0}{gt}.$$

В момент падения $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

С л у ч а й 4. Тело брошено с поверхности земли под углом α к горизонту со скоростью v_0 . Тогда

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha, \\ x = (v_0 \cos \alpha)t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = (v_0 \sin \alpha) - gt, \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

В момент времени $t_1 = (v_0 \sin \alpha)/g$ вертикальная проекция скорости обращается в ноль, следовательно, высота подъема над горизонтом в этот момент максимальна и равна

$$h = y(t_1) = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}.$$

В момент времени $t_2 = 2(v_0 \sin \alpha)/g$ тело упадет на землю, пройдя вдоль оси x расстояние

$$L = x(t_2) = (v_0 \cos \alpha)t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(дальность полета тела). Заметим, что формулы для $y(t)$, t_1 , t_2 и h получаются такими же, как в случае 2, если в нем положить $v_0 = v_0 \sin \alpha$. При заданной начальной скорости v_0 максимальная дальность полета достигается при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45^\circ$.

Пример 4. Посмотрим, как надо определять дальность полета, если бросок произведен не на горизонтальной, а на наклонной поверхности. Предположим, что камень бросили со скоростью v_0 перпендикулярно поверхности горы, наклоненной под углом α к горизонту. Так как начальная скорость составляет угол $(90^\circ - \alpha)$ с горизонтом, то формулы (5) приобретут вид:

$$x = (v_0 \sin \alpha)t, \quad y = (v_0 \cos \alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

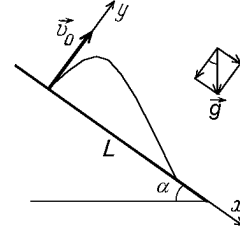


Рис. 4

Но главное состоит в том, что изменилось условие приземления камня. Вместо простого условия $y = 0$ теперь надо записать соотношение между координатами камня в момент падения на склон: $y = -x \tan \alpha$ (в момент падения $y < 0$). Подставив в это условие $x(t)$ и $y(t)$, вычислим время полета камня ($t = 2v_0 / (g \cos \alpha)$), после чего найдем дальность полета:

$$L = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha}.$$

Можно подойти к задаче по-другому. Вместо стандартных, горизонтальной и вертикальной, осей направим ось x вниз вдоль склона горы, а ось y — перпендикулярно склону (рис. 4). Тогда условие падения снова приобретет вид $y = 0$, но оба движения, по x и по y , будут происходить с ускорением: $a_x = g \sin \alpha$, $v_{0x} = 0$, $a_y = -g \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0$. Время полета найти теперь просто: $t = 2v_{0y} / |a_y| = 2v_0 / (g \cos \alpha)$, а дальность полета равна координате x в момент падения: $L = a_x t^2 / 2$.

► **Относительность движения.** Одно и то же движение будет по-разному выглядеть при наблюдении из разных систем отсчета. Рассмотрим связь между скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ материальной точки в двух разных системах отсчета K_1 и K_2 , оси которых в процессе движения остаются параллельными. Пусть за время Δt точка переместилась на $\vec{s}_2$ в системе отсчета K_2 , а сама система K_2 переместилась относительно системы K_1 на $\vec{s}$. Тогда перемещение $\vec{s}_1$ точки в системе K_1 равно сумме перемещений: $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + \vec{s}$. Деля это равенство на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получаем *закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}, \quad (6)$$

где $\vec{v}_1$ — скорость точки в системе K_1 , $\vec{v}_2$ — ее скорость в системе K_2 , а $\vec{v}$ — скорость движения системы K_2 относительно системы K_1 . Такое же соотношение выполняется и для ускорений: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}$.

Пример 5. В безветренную погоду капли дождя падают вертикально вниз с некоторой неизвестной скоростью $\vec{v}_1$ (зависящей от размера капель). Если наблюдать за дождем из системы отсчета, движущейся с некоторой горизонтальной скоростью $\vec{v}$, то капли будут падать под углом α к вертикали. Измерив α и v , можно найти v_1 . Для этого

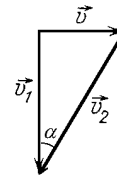


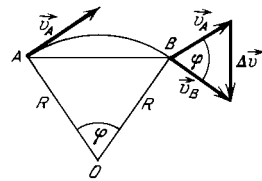
Рис. 5

изобразим векторное равенство (6) на рис. 5, учитывая, что $\vec{v}_1$ направлена вертикально вниз, а $\vec{v}$ — горизонтально. Из получившегося прямоугольного треугольника находим: $v_1 = v \operatorname{ctg} \alpha$. Если, например, в безветренную погоду следы капель на окне поезда наклонены под углом 30° , а скорость поезда 36 км/ч (10 м/с), то скорость падения капель равна $10\sqrt{3} \approx 17,2$ м/с.

Замечание. При одновременном свободном падении двух тел каждое из них движется относительно земли с ускорением $\vec{g}$. Поэтому в системе отсчета, связанной с одним из этих тел, второе движется без ускорения. Это означает, что движение второго тела в этой системе отсчета равномерное и прямолинейное. Переход в систему отсчета, связанную со свободно падающим телом, иногда называют методом барона Мюнхгаузена. (Этот барон, как известно, любил кататься на пушечном ядре.)

Пример 6. Стрелок хочет попасть в брошенный вверх мячик. Он собирается нажать на курок в тот момент, когда мячик оказывается в верхней точке (т.е. когда скорость мячика равна нулю). Так как стрелок находится далеко от того места, где подбрасывают мячик, он хочет решить, куда ему целиться. Надо ли ему вводить "поправку" на падение мячика, т.е. целиться ниже верхней точки его подъема? Оказывается, надо целиться точно в мячик, так как сама пуля сместится за время полета на такое же расстояние $gt^2/2$, как и мячик. С точки зрения воображаемого "барона Мюнхгаузена", сидящего на мячике, пуля будет приближаться к нему прямолинейно и равномерно (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха).

► **Равномерное движение материальной точки по окружности.** Движение по окружности (по произвольной кривой) называют равномерным, если оно происходит с постоянной по модулю скоростью. Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, а его модуль называют *линейной скоростью*. *Угловой скоростью* ω называется скорость изменения центрального угла φ , т.е. $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$, где $\Delta\varphi$ — изменение φ за время Δt . Если угол выражен в радианах, то длина дуги AB (рис. 6) $l = R\Delta\varphi$ (R — радиус окружности) и, следовательно,



$$v = \omega R,$$

т.е. линейная скорость точки равна произведению угловой скорости на радиус окружности. Угловая скорость выражается в радианах в секунду (рад/с).

Для описания равномерного вращательного движения используют также *период вращения* T (время одного оборота) и *частоту вращения* ν (число оборотов в единицу времени):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Частота вращения выражается в s^{-1} .

Даже при равномерном движении точки по окружности вектор скорости точки $\vec{v}$ изменяется. Следовательно, точка движется с

ускорением

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ — изменение скорости за время Δt (рис. 6). Из рисунка видно, что при уменьшении интервала времени Δt направление вектора $\Delta \vec{v}$ приближается к радиусу, соединяющему центр окружности с точкой. Значит, ускорение $\vec{a}$ направлено к центру окружности, и его называют *центростремительным ускорением*. Найдем это ускорение. Из подобия треугольника AOB и треугольника, образованного векторами $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\Delta \vec{v}$, следует, что

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{AB}{\Delta t}.$$

Поскольку $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (AB/\Delta t) = v$, центростремительное ускорение оказывается равным

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (7)$$

► **Неравномерное движение по окружности.** В общем случае угловая скорость $\omega = \varphi'(t)$ зависит от времени, и для описания движения вводят *угловое ускорение* $\varepsilon = \omega'(t)$ (выражается в рад/с²). Ускорение $\vec{a}$ направлено внутрь окружности под некоторым (не обязательно прямым) углом к скорости (рис. 7). Иначе говоря, в общем случае $\vec{a}$ имеет две компоненты: *нормальное ускорение* a_n и *тангенциальное ускорение* a_τ . Нормальное ускорение направлено к центру окружности (перпендикулярно к $\vec{v}$) и вычисляется по тем же формулам (7), что и центростремительное ускорение. Оно обеспечивает изменение $\vec{v}$ по направлению. Тангенциальное ускорение характеризует изменение величины скорости и равно $a_\tau = v'(t) = (\omega R)' = \varepsilon R$. (Направление вдоль скорости обычно считается положительным. На рисунке 7 a_τ направлено против скорости, это значит, что $a_\tau < 0$ и скорость уменьшается.)

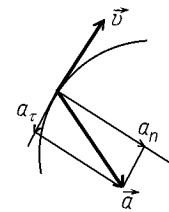


Рис. 7

При равноускоренном движении по окружности $\varepsilon = \text{const}$, и зависимости ω и $\Delta \varphi$ от времени имеют такой же вид, как v_x и s_x для равноускоренного движения точки по прямой (формулы (1) и (2)):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \Delta \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

► **Движение вдоль произвольной криволинейной траектории.** В общем случае для a_τ и a_n верны такие же соотношения, как при движении по окружности: $a_\tau = v'(t)$ и $a_n = v^2/R$, где R — радиус кривизны траектории, т.е. радиус окружности, наиболее близко примыкающей к траектории в данной точке. Если a_τ все время равно нулю, то движение вдоль траектории является равномерным. Если тождественно равно нулю a_n , то движение происходит по прямой.

Вопрос. Опишите качественно, как меняются a_τ , a_n и R при движении тела, брошенного под углом к горизонту.

Ответ. От начала движения до верхней точки $a_\tau < 0$ и $|a_\tau|$ уменьшается, a_n возрастает (полное ускорение все время равно $\vec{g}$), R уменьшается ($R = v^2/a_n$, а v уменьшается). Затем — наоборот.

► **Движение твердого тела.** *Твердым телом* называют идеальное тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется (т.е. отсутствуют деформации). Выделяют два вида движения твердого тела — поступательное и вращательное. При *поступательном движении* отрезок, соединяющий любые две точки тела, перемещается параллельно самому себе. Значит, все точки тела совершают одинаковые движения по одинаковым траекториям, и достаточно описать движение одной точки. При *вращательном движении* твердого тела вокруг неподвижной оси все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси. Угловая скорость ω всех точек тела одинакова, а линейные скорости пропорциональны расстоянию до оси вращения: $v = \omega R$. Произвольное движение твердого тела сводится к суперпозиции (наложению) поступательного и вращательного движений (вращательному движению относительно поступательно движущейся системы отсчета).

Пример 7. Качение колеса с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно земли (рис. 8) можно представить в виде наложения поступательного движения со скоростью v (вправо) и вращательного движения относительно оси колеса

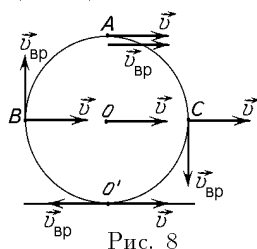


Рис. 8

с угловой скоростью ω (по часовой стрелке). В соответствии с законом сложения скоростей, скорость любой точки колеса равна векторной сумме скорости вращательного движения $\vec{v}_{вр}$, величина которой для точек на ободе равна $v_{вр} = \omega R$, и скорости поступательного движения $\vec{v}$. Скорость нижней точки колеса O' относительно земли должна быть равна нулю, значит в этой точке противоположно направленные $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ должны компенсироваться. Получаем, что из условия отсутствия проскальзывания следует связь между v и ω : $v = \omega R$.

В верхней точке A колеса $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ направлены в одну сторону, т.е. скорость точки A равна $v_A = 2v$. В точках B и C , находящихся на уровне центра, $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ взаимно перпендикулярны, и скорости этих точек равны $v_B = v_C = v\sqrt{2}$.

Ускорение любой точки на ободе колеса, в соответствии с законом сложения ускорений (аналогичным (6)), равно ускорению вращательного движения $\omega^2 R$ и направлено к центру окружности

(ускорение равномерно движущейся системы отсчета равно нулю).

Замечание. Скорость любой точки колеса в данный момент можно найти как скорость чистого вращения с угловой скоростью ω относительно неподвижной (в этот момент) *мгновенной оси вращения* O' . Проверьте, что скорости точек A , B и C получаются такими же, как выше.

§2. Основы динамики

► **Первый закон Ньютона** состоит в том, что существуют такие системы отсчета, в которых любое свободно движущееся тело, т.е. тело, на которое не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются), движется равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, существование которых постулирует этот закон, называются *инерциальными*.

Из закона сложения скоростей (6) видно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, также является инерциальной. Все законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах. Утверждение о равноправии инерциальных систем отсчета называют *принципом относительности Галилея*.

Используемые при решении задач системы отсчета инерциальны лишь с той или иной степенью точности. Так, систему, связанную с поверхностью Земли, во многих случаях можно считать инерциальной. Однако из-за суточного вращения Земли она не является абсолютно инерциальной, о чем свидетельствует, например, медленное вращение плоскости колебаний длинного маятника (*маятник Фуко*).

Из первого закона Ньютона следует, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела возникает только в результате его взаимодействия с другими телами. Это ускорение зависит от инертности тела, т.е. его способности сопротивляться изменению скорости, а также от интенсивности и направления действия на него других тел.

► **Масса.** Масса тела m — это скалярная положительная величина, характеризующая *инертность* тела. Эксперименты показывают, что при взаимодействии двух тел их ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в инерциальной системе отсчета направлены в противоположные стороны, а отношение модулей ускорений a_1/a_2 не зависит от характера и интенсивности взаимодействия. Это позволяет определить отношение масс двух произвольных тел как величину, обратную отношению ускорений, возникающих при их взаимодействии друг с другом: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Чтобы определить не только отношение массы данного тела к массе других тел, но и абсолютное значение массы m , необходимо установить эталон массы. В СИ за эталон массы принимают один *килограмм* (1 кг), примерно равный массе 10^{-3} м³ воды. Таким образом, сравнивая ускорение тела a , возникающее при его взаимодействии с телом массой $m_0 = 1$ кг, и ускорение a_0 , приобретаемое эталонным телом, можем найти массу тела $m = a_0 m_0 / a$.

Как показывает опыт, такое определение массы является непротиворечивым: если измерить отношение ускорений a_1/a_2 двух тел, массы которых m_1 и m_2 были до этого определены из взаимодействия с эталоном, то оно окажется равным m_2/m_1 . Кроме того, определенная таким образом масса обладает важным свойством аддитивности: сумма масс частей, на которые можно разделить тело, равна массе всего тела.

► **Сила.** *Силой*, действующей на тело массой m при его взаимодействии с другим телом, назовем величину $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение тела m в инерциальной системе отсчета. Таким образом, сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое телу этой силой. В СИ сила выражается в *ньютонах* (Н = кг · м/с²).

► **Второй закон Ньютона.** Если на материальную точку одновременно действуют n тел с силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ соответственно, то ускорение тела $\vec{a}$ определяется *векторной суммой этих сил*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}{m}$$

Силу $\vec{F}$ называют *равнодействующей* (или *результатирующей*) сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$.

► **Третий закон Ньютона.** *Третий закон Ньютона* утверждает, что силы $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$, с которыми действуют друг на друга два взаимодействующих тела A и B , направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны между собой по модулю:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

Этот закон выполняется для любых взаимодействующих тел независимо от природы взаимодействия и от того, находятся ли тела в непосредственном контакте или взаимодействуют на расстоянии с помощью гравитационных или электромагнитных сил.

► **Силы природы.** Все разнообразие действующих в природе сил можно свести к нескольким фундаментальным взаимодействиям (гравитационному, слабому, электромагнитному и сильному).

Однако для практических целей такой подход непригоден, и кроме фундаментальных далекодействующих сил надо знать свойства различных сил, возникающих при контакте макроскопических тел.

Сила упругости. Под действием внешних сил (нагрузки) твердое тело деформируется (изменяет форму и размеры). Деформацию называют *упругой*, если при снятии нагрузки форма тела восстанавливается. (Подробнее об упругих деформациях рассказано на стр. 68.) Сила, с которой деформируемое упругое тело действует на деформирующее (источник нагрузки), называют *силой упругости*. При деформации линейного тела (растяжении или сжатии стержня или пружины, растяжении упругого шнура) сила упругости пропорциональна изменению длины тела (*закон Гука*):

$$|\vec{F}_{упр}| = k|\Delta l|,$$

где коэффициент пропорциональности k называется *жесткостью* (в СИ k измеряется в Н/м), а $\Delta l = l - l_0$ — изменение длины тела (l_0 — длина в недеформированном состоянии). При растяжении ($\Delta l > 0$) сила упругости направлена в сторону упругого тела (растянутое тело "тянет на себя"), при сжатии ($\Delta l < 0$) — наоборот.

Если деформация линейного тела происходит за счет смещения точки приложения нагрузки (другой конец тела закреплен), то для проекции силы упругости на ось x , параллельную телу, можно записать

$$F_{упр\,x} = -kx,$$

где x — *смещение* точки приложения нагрузки (смещение отсчитывается от положения этой точки в отсутствие деформации).

Вопрос. Как жесткость резинового шнура (стержня, пружины) зависит от его длины? Во сколько раз изменится жесткость, если резиновый шнур сложить пополам?

Ответ. При растяжении шнура в любой его точке возникает одинаковая сила упругости. При этом растяжение любой части шнура пропорционально ее длине (например, половина шнура удлинилась в два раза меньше, чем весь шнур). Значит, жесткость куска шнура обратно пропорциональна его длине. При складывании пополам шнура жесткостью k жесткость каждой половины равна $2k$ и они действуют одновременно, т.е. общая жесткость равна $4k$.

Если жесткость тела k велика, а сила упругости не очень большая, то изменением формы тела можно пренебречь и считать его абсолютно твердым. Силу упругости, действующую на поверхность, называют в этом случае *силой давления* и обозначают $\vec{P}$, а силу противодействия, действующую со стороны поверхности на тело, — *силой нормальной реакции* $\vec{N}$; $\vec{N} = -\vec{P}$. Аналогично при большом значении k можно пренебречь растяжением нити и считать ее нерастяжимой. В этом случае силу упругости называют *силой натяжения нити* и обозначают $\vec{T}$.

Пример 8. Два тела массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок, не оказывающий сопротивления вращению (рис. 9). Найдем ускорения тел и силу натяжения нити. Так как массы блока и нити пренебрежимо малы, а блок не оказывает сопротивления вращению, то силы натяжения, действующие на тела, равны по модулю: $T_1 = T_2 = T$. Из нерастяжимости нити следует, что ускорения тел $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Поэтому уравнения второго закона Ньютона в проекции на ось y , направленную вниз, можно записать в виде:

$$\begin{cases} m_1 a_{1y} = m_1 g - T, \\ -m_2 a_{1y} = m_2 g - T. \end{cases}$$

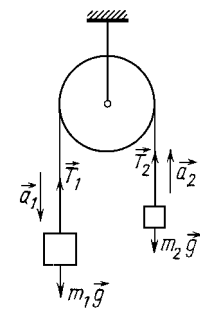


Рис. 9

Решая эту систему, находим:

$$a_{1y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Силы трения. Если два тела находятся в контакте и не движутся друг относительно друга, то кроме сил упругости, действующих перпендикулярно соприкасающимся поверхностям, возникают *силы трения покоя*, действующие в плоскости, касательной к этим поверхностям. Величина и направление силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ в этой плоскости могут быть любыми при условии, что ее модуль не превосходит максимального значения $F_{\text{тр. max}} = \mu N$, где N — величина силы давления (нормальной реакции), а μ называется *коэффициентом трения покоя*. Силу трения покоя можно найти из условия относительной неподвижности соприкасающихся тел (условия отсутствия скольжения).

Если модуль найденной таким образом силы трения покоя превышает максимальное значение, то состояние, при котором отсутствует скольжение, оказывается невозможным. В том случае, когда поверхность одного тела скользит по поверхности другого, действующую между ними силу трения называют *силой трения скольжения*. Абсолютная величина силы трения скольжения практически не зависит от скорости движения и пропорциональна силе давления (нормальной реакции):

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ — *коэффициент трения скольжения*, который обычно принимают равным коэффициенту трения покоя. Сила трения скольжения, приложенная к одному из тел, лежит в плоскости контакта тел и направлена в сторону, противоположную вектору скорости этого тела относительно другого.

Пример 9. Рассмотрим тело массой m , находящееся на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, при условии, что коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ (рис. 10). Второй закон Ньютона для тела имеет

вид: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$, где $\vec{a}$ — ускорение тела, а $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — силы реакции и трения. Проецируя это уравнение на оси декартовой системы, в которой ось x направлена вдоль плоскости, а ось y — перпендикулярно ей, имеем:

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ 0 = N - mg \cos \alpha. \end{cases}$$

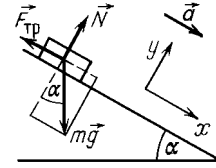


Рис. 10

Если тело покоится, то из первого уравнения можно найти силу трения покоя: $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$. Она должна быть меньше предельного значения $F_{\text{тр. max}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, т.е. условие неподвижности тела имеет вид $\tan \alpha < \mu$. Если это условие не выполняется, то тело поедет по плоскости с ускорением $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, которое можно найти из первого уравнения после подстановки в него выражения для силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$.

Гравитационные силы. Все тела в природе притягиваются друг к другу. Возникающие при этом силы называются *гравитационными* и подчиняются *закону всемирного тяготения Ньютона*. Для двух материальных точек с массами m_1 и m_2 гравитационные силы (силы тяготения) $\vec{F}$ направлены вдоль прямой, соединяющей точки, и равны

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — *гравитационная постоянная*, а r — расстояние между точками.

Тела сложной формы можно разбить на материальные точки, а затем вычислить и просуммировать все элементарные гравитационные силы. Гравитационная сила, действующая на материальную точку со стороны сферически симметричного тела, была вычислена Ньютоном. Оказалось, что величина и направление этой силы точно такие же, как для материальной точки, масса которой равна массе тела и сосредоточена в его центре.

Гравитационная сила, действующая со стороны Земли на небольшое тело, находящееся вблизи ее поверхности, называется *силой тяжести*. Сила тяжести направлена к центру Земли, т.е. перпендикулярно земной поверхности, и равна

$$F_{\text{тяж}} = G \frac{M_3 m}{R^2} = mg,$$

где M_3 , R — масса и радиус Земли, а $g = GM_3/R^2$ — *ускорение свободного падения*. Движение тела под действием силы тяжести в отсутствие других сил называется свободным падением. Оно было рассмотрено раньше.

► **Вес.** *Вес тела* — это сила, с которой оно действует на опору или подвес, относительно которых тело не движется. По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{F}_p$, где $\vec{F}_p$ — сила реакции опоры, которую можно найти из второго закона Ньютона: $\vec{F}_p + m\vec{g} = m\vec{a}$. Вес $\vec{P}$

тела, движущегося относительно земли равномерно и прямолинейно, равен силе тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. Вес тела, движущегося (вместе с опорой) с ускорением $\vec{a}$, равен $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Видно, что вес свободно падающего тела равен нулю. Поэтому состояние свободного падения называют *состоянием невесомости*.

Вопрос. Для привыкания космонавтов к условиям невесомости требуется создать искусственную невесомость. Как это можно сделать в земных условиях? На какое время?

Ответ. Ясно, что для этого нежелательно помещать космонавта в кабину падающего лифта. (Кстати, и время такого падения невелико: с высоты 200 м лифт будет падать примерно 6 с.) Поступают по-другому: задают программу автопилоту, которая заставляет самолет лететь точно так же, как двигалось бы в отсутствие воздуха тело, брошенное под углом к горизонту (см. (5)). Например, если эта программа начнет действовать в тот момент, когда скорость самолета равна 250 м/с и направлена под углом 45° к горизонту, то до возвращения на тот же уровень пройдет время $t = 2v_0 \sin \alpha / g \approx 35$ с.

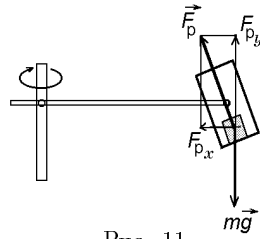


Рис. 11

Пример 10. Чтобы космонавты смогли привыкнуть к перегрузкам, возникающим при старте ракеты с большим ускорением, их раскручивают на центрифуге (рис. 11). Найдём перегрузку, т.е. отношение веса P к mg , при вращении центрифуги в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω . Для этого запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось x , направленную от кабины к центру окружности (проекция ускорения на эту ось равна центростремительному ускорению (7)), и на вертикальную ось y :

$$\begin{cases} F_{px} = m\omega^2 R, \\ F_{py} - mg = 0, \end{cases}$$

где F_{px} , F_{py} — проекции на оси силы реакции $\vec{F}_p$, действующей на человека со стороны тренажера. Из этих уравнений находим силу реакции, которая, по третьему закону Ньютона, равна весу человека в условиях тренировки

$$P = F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 R)^2},$$

и вычисляем перегрузку

$$\frac{P}{mg} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)^2}.$$

Вопрос. Можно ли считать, что вес тела на поверхности Земли точно равен по величине и направлению силе тяготения?

Ответ. Нет, так как любое тело на поверхности Земли участвует в ее точном вращении, т.е. движется (вместе с поверхностью Земли в данном месте) с центростремительным ускорением, направленным в сторону земной оси. На полюсах $\vec{P} = m\vec{g}$, а на экваторе вес меньше, чем mg , на величину $m\omega^2 R$, что составляет $\approx 0,34\%$ от mg (ω — угловая скорость вращения Земли, которую легко найти, зная период вращения $T = 24$ часа; $R \approx 6400$ км — радиус Земли). Экспериментально определенное в данном месте (путем взвешивания) значение $\vec{g}$ уже включает в себя влияние вращения Земли, и используемая при расчетах сила тяжести $m\vec{g}$ равна весу покоящегося тела данной массы, т.е. немного отличается от силы тяготения по величине и направлению.

Если тело движется со скоростью v по круговой орбите радиусом $r > R$ вокруг Земли (такие тела называют *искусственными*

спутниками Земли), то ускорение тела равно центростремительному ускорению: $a = a_{\text{цс}} = v^2/r$. По второму закону Ньютона $ma = GM_3m/r^2$, откуда

$$v^2 = G \frac{M_3}{r} = G \frac{M_3}{R+h},$$

где h — расстояние от орбиты до поверхности Земли. Скорость искусственного спутника v_I , движущегося вдоль поверхности Земли (первая космическая скорость), можно найти, положив $h = 0$. Пользуясь определением g , получаем

$$v_I^2 = G \frac{M_3}{R} = gR,$$

или $v_I = \sqrt{gR} \approx 7,9$ км/с.

► **Статика.** Статика изучает условия равновесия тел. Для равновесия материальной точки необходимо, чтобы сумма сил, действующих на точку, была равна нулю. Для равновесия твердого тела этого недостаточно, поскольку под действием двух равных по величине, но противоположно направленных сил тело может вращаться (рис. 12 а). Рассмотрим сначала условие равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения O (рис. 12 б). Назовем моментом M силы $\vec{F}$ относительно оси O произведение модуля силы F на плечо этой силы d

$$M = \pm Fd,$$

где d — расстояние от оси O до линии действия силы $\vec{F}$. Знак момента определяется выбором положительного направле-

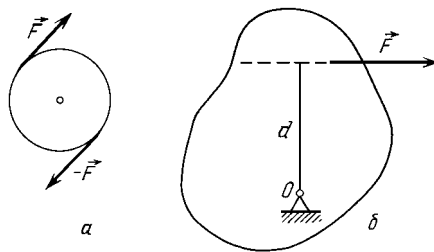


Рис. 12

ния вращения, — например, считается положительным, если сила вызывает вращение тела по часовой стрелке. Момент силы характеризует ее вращательное действие по отношению к выбранной оси. Из определения момента видно, что вращательное действие силы а) не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия, б) возрастает при удалении линии действия силы от оси вращения и в) обращается в ноль, если линия действия силы проходит через

ось вращения. Условие равновесия тела с осью вращения O состоит в том, что алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси O должна равняться нулю (*правило моментов*).

Пример 11. Рассмотрим *равновесие рычага* — системы, состоящей из двух материальных точек m_1 и m_2 , соединенных жестким невесомым стержнем AB , шарнирно закрепленным в точке O . По правилу моментов алгебраическая сумма моментов сил тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ должна равняться нулю (плечо силы реакции опоры $\vec{N}$ равно нулю, так как она проходит через ось). Отсюда получаем условие равновесия рычага: $m_1g|AO| = m_2g|BO|$ или $m_1/m_2 = |BO|/|AO|$.

Общее условие равновесия тела состоит в выполнении двух условий: 1) сумма сил, действующих на тело, должна равняться нулю и 2) сумма моментов относительно любой оси также должна равняться нулю (для неподвижного тела каждая ось может рассматриваться как неподвижная ось вращения). Назовем *равнодействующей* сил, действующих на тело, силу, равную векторной сумме этих сил и имеющую такое же вращательное действие на тело, как и все силы, действующие вместе.

Пример 12. Найдем равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в следующих случаях (рис. 13):

- линии действия $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются;
- $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ параллельны;
- $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ антипараллельны и имеют различные модули;
- $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ антипараллельны и равны по модулю (*пара сил*).

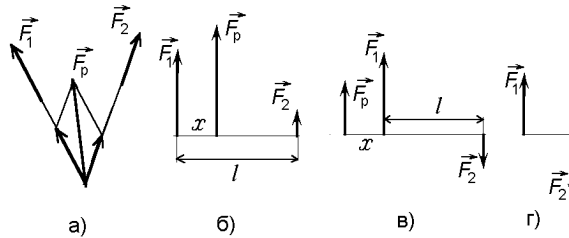


Рис. 13

В случае а) силы надо переместить в точку их пересечения, после чего найти их векторную сумму. В случае б) линия равнодействующей лежит между линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, ее положение определяется уравнением $F_1x = F_2(l-x)$ (сравните с условием равновесия рычага). В случае в) линия действия равнодействующей лежит вне линий действия сил, со стороны большей силы (на рис. 13в это $\vec{F}_1$), ее положение определяется условием $F_1x = F_2(l+x)$. Видно, что чем меньше отличаются силы по модулю, тем дальше лежит равнодействующая. В случае г) сумма сил равна нулю, и поэтому их нельзя заменить одной равнодействующей.

► **Центр тяжести.** При любой ориентации тела (или системы тел) в однородном поле тяжести равнодействующая сил тяжести проходит через одну и ту же точку тела, которую называют *центром тяжести*. Положение центра тяжести может быть найдено

из условия, что сумма моментов сил тяжести относительно любой проходящей через него оси равна нулю. Часто положение этой точки удается определить разбиением тела на части простой формы.

Пример 13. Найдем центр тяжести плоского однородного треугольника. Разобьем треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон. Центр тяжести каждой полоски лежит в ее середине. Значит, мы заменили треугольник набором точек, лежащих на его медиане. Следовательно, центр тяжести должен лежать на этой медиане. Повторяя рассуждение для каждой из сторон, приходим к выводу, что центр тяжести лежит на пересечении медиан.

§ 3. Законы сохранения в механике

► **Импульс.** Импульсом $\vec{p}$ тела (материальной точки) называется произведение массы m на скорость $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$. Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ за время Δt можно представить в виде $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$, откуда получаем, что второй закон Ньютона может быть записан в виде

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело. Величина $\vec{F}\Delta t$ называется импульсом силы $\vec{F}$.

Импульсом $\vec{p}$ системы, состоящей из n материальных точек $m_1, m_2, \dots, m_n$, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ соответственно, называется сумма импульсов точек

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n.$$

► **Закон сохранения импульса.** Рассмотрим систему, состоящую из двух точек m_1 и m_2 , имеющих скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Обозначим через $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ внешние силы, действующие на точки m_1 и m_2 соответственно, а силы взаимодействия $\vec{F}_{12}$ (сила, с которой точка m_1 действует на точку m_2) и $\vec{F}_{21}$. Тогда из второго закона Ньютона следует, что

$$\begin{aligned} m_1\Delta\vec{v}_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21})\Delta t, \\ m_2\Delta\vec{v}_2 &= (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12})\Delta t. \end{aligned}$$

Из третьего закона Ньютона имеем $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Поэтому, складывая уравнения, получаем

$$\Delta\vec{p} = m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t \quad (8)$$

Видно, что импульс системы изменяется только под действием внешних сил.

Пример 14. Вычислим силу, которая действует на изогнутый под углом 90° участок трубы сечением S , если по трубе течет вода со скоростью v . Для изменения импульса воды на нее со стороны трубы должна действовать сила, равная $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$,

где $\Delta \vec{p}$ — изменение импульса воды за время Δt . Масса воды, прошедшей через изгиб за это время, равна $\Delta m = \rho_v v S \Delta t$, а изменение скорости этой массы воды равно $v\sqrt{2}$ и направлено по биссектрисе угла (рис. 14). Значит, изменение импульса $\Delta \vec{p}$ направлено по биссектрисе и равно $|\Delta \vec{p}| = \sqrt{2} \rho_v S v^2 \Delta t$, а сила, действующая на воду, равна $F = \sqrt{2} \rho_v S v^2$ и тоже направлена по биссектрисе. Сила реакции воды $\vec{F}_p$, приложенная к трубе, действует в обратном направлении.

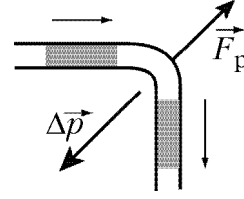


Рис. 14

Закон сохранения импульса выполняется в следующих случаях.

1. Если система *замкнута*, т.е. на точки m_1 и m_2 не действуют внешние силы, то импульс системы сохраняется: $\Delta \vec{p} = 0$, или

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

Этот вывод не изменится, если $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не равны нулю, но равна нулю их сумма.

2. Если внешние силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ *перпендикулярны некоторой оси x* (пример — сила тяжести), то проекция импульса на это направление сохраняется: $\Delta p_x = 0$, $p_x = \text{const.}$

3. Если внутренние силы $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ имеют *ударный или взрывной* характер, т.е. в течение короткого интервала времени Δt достигают больших (по абсолютной величине) значений, а внешние силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ остаются ограниченными ($F_i \ll F_{12}$; $i = 1, 2$), то изменением импульса системы за время Δt можно пренебречь и считать, что на интервале времени Δt импульс системы сохраняется: $\vec{p} = \text{const.}$ Отметим, что в этом случае, в отличие от случая 1, импульс сохраняется лишь на малом промежутке времени Δt .

Закон сохранения импульса выполняется в трех приведенных выше случаях для систем, состоящих не только из двух, но и из любого числа тел.

► **Центр масс.** Центр масс системы, состоящей из n материальных точек $m_1, m_2, \dots, m_n$, положение которых задается радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ — это точка, положение которой задается радиус-вектором

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (9)$$

Тело произвольной формы можно представить как совокупность материальных точек и определять его центр масс по этой же формуле. Центр масс обладает многими замечательными свойствами:

1. Взяв производную по времени от уравнения (9), получим, что импульс системы равен произведению массы системы m на скорость центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{v}_{\text{цм}}.$$

Если импульс сохраняется, то центр масс движется с постоянной скоростью.

2. Изменение импульса системы $\Delta \vec{p}$ равно, с одной стороны, $m \Delta \vec{v}_{\text{цм}}$, а с другой стороны, произведению результирующей внешней силы $\vec{F}$ на Δt (см. уравнение (8)). Значит, движение центра масс подчиняется уравнению

$$\vec{F} = m \vec{a}_{\text{цм}}.$$

Видно, что движение центра масс определяется только *внешними* силами, т.е. *внутренние* по отношению к системе силы на его движение не влияют.

3. Если единственная сила, действующая на тело, приложена к его центру масс, то она не будет вызывать вращательного движения.

4. Равнодействующая сил тяжести, приложенных к точкам тела или системы, проходит через центр масс, т.е. центр масс совпадает с *центром тяжести* тела в однородном поле тяготения (см. стр. 22).

Пример 15. В качестве примера использования понятия центра масс вычислим период вращения двойной звезды, состоящей из двух звезд массами m_1 и m_2 , расстояние между которыми неизменно и равно r . Центр масс этой системы расположен между звездами, на расстоянии $r_1 = m_2 r / (m_1 + m_2)$ от первой звезды (рис. 15). Так как система замкнута, то скорость центра масс постоянна, и связанная с ним система отсчета является инерциальной. В этой системе отсчета каждая звезда движется по окружности своего радиуса вокруг центра масс. Записав второй закон Ньютона для звезды массой m_1

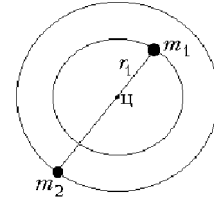


Рис. 15

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1$$

и подставив r_1 , найдем период вращения:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}}.$$

Видно, что период вращения определяется полной массой звезды и не зависит от того, как она распределена между компонентами.

► **Реактивное движение.** Как уже отмечалось выше, внутренние силы не могут изменить характера движения центра масс системы. Однако скорости частей системы могут существенно меняться за счет действия внутренних сил. Рассмотрим управление ракетой в отсутствие внешних сил, за счет выброса реактивной струи. Пусть из сопла ракеты за малое время Δt вылетают отработанные газы массой Δm со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Запишем закон сохранения импульса системы «ракета — газы» для интервала времени Δt . В инерциальной системе отсчета, скорость которой

равна скорости ракеты в начале интервала времени Δt , получаем: $M\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{u} = 0$, где $\Delta\vec{v}$ — изменение скорости ракеты за время Δt , M — ее масса в данный момент ($\Delta m \ll M$). Отсюда находим, что $\Delta\vec{v} = -\vec{u}\Delta m/M$. *Реактивная сила*, действующая на ракету со стороны реактивной струи, определяется как произведение массы ракеты на ее ускорение: $\vec{F}_p = M(\Delta\vec{v}/\Delta t) = -\mu\vec{u}$ ($\mu = \Delta m/\Delta t$ — расход топлива, т.е. масса топлива, выбрасываемая в единицу времени). Таким образом, выброс газов из сопла ракеты с большой скоростью приводит к увеличению скорости движения самой ракеты. При движении ракеты во внешнем поле тяжести ее ускорение определяется равнодействующей сил: $M\vec{a} = -\mu\vec{u} + M\vec{g}$.

Принцип реактивного движения позволяет совершать полеты в безвоздушном космическом пространстве.

► **Работа и энергия.** Состояние любой системы характеризуется скалярной величиной E — энергией, которая однозначно определяется состоянием системы. С ней связана другая скалярная величина — механическая работа A . При изменении состояния системы под действием внешних сил их работа характеризует изменение энергии:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A.$$

► **Механическая работа.** Если на тело, движущееся по прямой, действует постоянная сила $\vec{F}$, то механической работой A этой силы на перемещении $\vec{s}$ называется произведение

$$A = F s \cos \alpha = F_s s,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$, а F_s — проекция силы на перемещение. В СИ работа и энергия выражаются в *джоулях* (Дж = Н·м). Работа A силы $\vec{F}$ положительна, если угол α — острый, и отрицательна, если угол α — тупой. При движении тела по криволинейной траектории или изменении силы в процессе движения траекторию можно разбить на малые участки, соответствующие перемещениям $\Delta\vec{r}_i$, и считать силу постоянной на каждом из таких участков. Тогда работа A силы $\vec{F}$ равна сумме элементарных работ

$$\Delta A_i = F_{si} |\Delta\vec{r}_i| = F_{si} \Delta l_i, \quad (10)$$

где F_{si} — проекция силы на $\Delta\vec{r}_i$, а Δl_i — величина пути на этом малом участке. Поэтому работу A можно представить как площадь под кривой зависимости проекции силы на перемещение F_s от пути l (рис. 16).

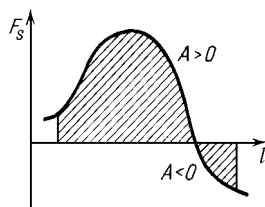


Рис. 16

► **Мощность.** Средняя мощность $P_{\text{ср}}$ силы $\vec{F}$ — это отношение работы A , совершенной силой $\vec{F}$ за время t , к интервалу времени t :

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t}.$$

Мгновенная мощность P или просто мощность — это предел, к которому стремится средняя мощность при неограниченном уменьшении интервала времени:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t),$$

т.е. мощность — это производная работы, рассматриваемой как функция времени. Подставляя выражение для элементарной работы из формулы (10) и учитывая, что $\Delta l / \Delta t = v$, получаем

$$P = Fv \cos \alpha = F_v v,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$, а F_v — проекция силы на скорость. Мощность в СИ выражается в *ваттах* (Вт = Дж/с).

► **Кинетическая энергия.** Чтобы изменить скорость тела, к нему необходимо приложить силу $\vec{F}$ и, следовательно, совершить работу. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ — результирующая сила. На малом интервале времени Δt силу можно считать постоянной, а движение — равноускоренным. В этом случае, как было показано ранее (см. формулу (4)), выполняется соотношение $2a_s s = v^2 - v_0^2$, где s — величина перемещения тела за время Δt , a_s — проекция ускорения на направление движения, а v_0 и v — скорости в начальный момент времени и через Δt . Подставляя в это соотношение выражения для ускорения $a_s = F_s/m$ и работы $A = F_s s$, получаем, что

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Так как это соотношение выполняется на каждом малом участке движения, то оно будет верным и для всего движения. Видно, что работа силы $\vec{F}$ определяется только величиной начальной и конечной скоростей тела, к которому эта сила приложена. Поэтому можно ввести кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$ — величину, зависящую только от скорости и массы тела:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2},$$

изменение которой равно работе внешних сил:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A$$

(теорема о кинетической энергии).

Пример 16. Вычислим полезную мощность брандспойта (т.е. мощность, затрачиваемую на увеличение кинетической энергии воды), если скорость вылетающей струи равна $v = 20 \text{ м/с}$, а ее сечение $s = 5 \text{ см}^2$. Кинетическая энергия воды массой Δm , выброшенной из брандспойта за время Δt , равна

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} (\rho_B s v \Delta t) v^2 = \frac{1}{2} \rho_B s v^3 \Delta t,$$

откуда для мощности получаем $P = \rho_B s v^3 / 2 \approx 2 \text{ кВт}$. (Средняя сила реакции струи равна $\Delta m v / \Delta t = \rho_B s v^2$, а множитель $1/2$ возникает потому, что средняя скорость воды при разгоне равна $v/2$.) Отметим, что при использовании этой струи для водных процедур (массажа) сила давления равна $F = \rho_B s v^2 \approx 400 \text{ Н}$, а давление $p = F/s = \rho_B v^2 \approx 4 \text{ атм}$. (См. также пример 14.)

► **Консервативные силы.** Пусть сила $\vec{F}$, действующая на тело, принимает определенное значение при любом возможном положении тела и не зависит от скорости и направления его движения. Такая сила называется *консервативной*, если ее работа A_{BC} при перемещении тела из точки B в точку C не зависит от траектории (или, что то же самое, работа на любой замкнутой траектории равна нулю).

1. Работа силы тяжести при перемещении тела по прямолинейной траектории BC равна $A_{BC} = -mg\Delta h$, где Δh — проекция отрезка BC на вертикальную ось. Формула

$$A = -mg\Delta h \quad (11)$$

верна для случая перемещения тела по любой траектории (это легко доказать, разбив траекторию на прямолинейные участки). Из уравнения (11) видно, что сила тяжести — консервативная.

2. Работа силы упругости при изменении растяжения упругого тела от x_1 до x_2 равна площади трапеции на графике $F_{\text{упр},x}(x) = -kx$ (рис.17)

$$A = -\frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \quad (12)$$

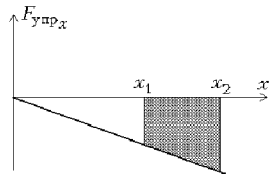


Рис. 17

Из формулы (12) видно, что работа силы упругости зависит только от начального и конечного растяжения, т.е. эта сила — консервативная.

3. Работа силы трения всегда отрицательная. Поэтому ее работа при перемещении по замкнутой траектории не равна нулю, т.е. сила трения — не консервативная.

► **Потенциальная энергия.** Работа консервативной силы однозначно определяется начальным и конечным положениями точки приложения силы. Поэтому для любой консервативной силы можно

определить потенциальную энергию, зависящую только от положения тела в пространстве или от относительного расположения его частей. Приложим к телу внешнюю силу $\vec{F}^*$, уравнивающую консервативную силу $\vec{F}$ ($\vec{F}^* = -\vec{F}$), и будем очень медленно перемещать тело из одной точки в другую. Поскольку перемещение медленное, то кинетическая энергия пренебрежимо мала и изменение энергии тела (равное работе внешней силы A^*) равно изменению потенциальной энергии $E_{\text{пот}}$: $A^* = \Delta E = \Delta E_{\text{пот}}$. Но внешняя сила была выбрана так, что $A^* = -A$, где A — работа консервативной силы $\vec{F}$, поэтому

$$\Delta E_{\text{пот}} = -A. \quad (13)$$

Для того чтобы окончательно определить потенциальную энергию, формулу (13) нужно дополнить выбором того состояния системы, в котором потенциальная энергия равна нулю.

Из формул (11)—(13) следует, что *потенциальная энергия силы тяжести* равна

$$E_{\text{пот}} = mgh,$$

где h отсчитывается от нулевого уровня, а *потенциальная энергия силы упругости* равна

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2},$$

где за нуль принята энергия недеформированного тела.

Замечание. Потенциальная энергия системы точек (например, твердого тела) в поле тяжести равна

$$E_{\text{пот}} = mgh_{\text{цм}},$$

где m — масса системы, а $h_{\text{цм}} = (m_1h_1 + m_2h_2 + \dots)/m$ — высота центра масс (центра тяжести), определяемая формулой (9).

► **Закон сохранения механической энергии.** Механическая энергия системы E равна сумме ее потенциальной $E_{\text{пот}}$ и кинетической $E_{\text{кин}}$ энергий. Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы (*консервативная система*), то механическая энергия системы сохраняется:

$$\Delta E = 0; \quad E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \text{const.}$$

Действительно, согласно теореме о кинетической энергии $\Delta E_{\text{кин}} = A$, а из (13) имеем $\Delta E_{\text{пот}} = -A$. Под действием консервативных сил механическая энергия не переходит в другие

виды энергии. Закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения энергии в любой замкнутой системе.

Рассмотрим два примера на закон сохранения энергии.

Пример 17. При *упругом ударе* шаров выполняется как закон сохранения импульса (сумма внешних сил равна нулю), так и закон сохранения механической энергии (система консервативна). Рассмотрим центральный удар шара массой m_1 о покоящийся шар массой m_2 :

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \\ \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}, \end{cases}$$

где v_{1x} — скорость шара до удара, а u_{1x} , u_{2x} — скорости шаров после удара (в проекции на направление движения налетающего шара). Чтобы упростить эту систему уравнений, перенесем в левую часть каждого уравнения все члены с m_1 , и поделим второе уравнение на первое (при этом мы отбрасываем решение $u_{1x} = v_{1x}$, $u_{2x} = 0$, соответствующее отсутствию удара). Получим уравнение

$$v_{1x} + u_{1x} = u_{2x}.$$

Решая его совместно с уравнением сохранения импульса, находим конечные скорости шаров:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}.$$

Видно, что если $m_1 > m_2$, то налетающий шар продолжает движение вперед, если $m_1 = m_2$, то он останавливается, если $m_1 < m_2$, то он отлетает назад.

Пример 18. Рассмотрим соскальзывание маленького тела с вершины гладкой горки, имеющей форму полусферы радиусом R . Найдём, как меняется давление груза на горку в зависимости от высоты h . Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиус для момента времени, изображенного на рис.18:

$$mg \cos \alpha - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Мы использовали тот факт, что при любом, как равномерном, так и неравномерном движении по окружности проекция ускорения на радиус (нормальное ускорение) равна v^2/R . Скорость выразим из закона сохранения энергии, приравняв механическую энергию в рассматриваемый момент к энергии в верхней точке:

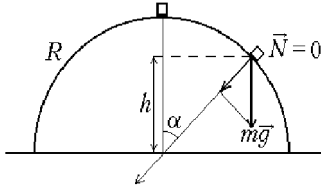


Рис. 18

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgR \cos \alpha$$

(потенциальная энергия отсчитывается от центра сферы). Решая уравнения, находим

$$N = 3mg \left(\cos \alpha - \frac{2}{3} \right).$$

Видно, что при $\cos \alpha = 2/3$ сила давления обратится в ноль. Значит, в этот момент (на высоте $2R/3$) тело оторвется от поверхности горки и продолжит свободный полет по параболе.

► **Изменение механической энергии.** *Изменение механической энергии* под действием внешних и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил A :

$$\Delta E = A.$$

Например, при действии силы трения ($A < 0$) механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю, тепловую энергию тел. Другой причиной нарушения закона сохранения механической энергии являются машины, совершающие работу за счет внутренней энергии (в том числе человек).

Если система тел является замкнутой, то работа неконсервативных сил приводит к изменению внутренней энергии тел системы. С учетом внутренней энергии закон сохранения энергии можно записать в виде

$$E_{\text{мех1}} = E_{\text{мех2}} + \Delta E_{\text{внутр}}.$$

Силы трения, сопротивления относятся к разряду *диссипативных*, т.е. их действие приводит к диссипации (потере) механической энергии за счет увеличения внутренней тепловой энергии. В этом случае $\Delta E_{\text{внутр}} > 0$, изменение внутренней энергии обозначают буквой Q и называют количеством выделившегося тепла (теплоты). Закон сохранения энергии можно записать в виде

$$E_{\text{мех1}} = E_{\text{мех2}} + Q.$$

Отметим, что количество выделившегося тепла равно работе сил трения, взятой с обратным знаком (или по модулю): $Q = \Delta E_{\text{внутр}} = |A_{\text{тр}}|$.

Пример 19. Переход механической энергии во внутреннюю происходит и при *неупругом ударе* тел. Вычислим потерю механической энергии при застревании пули массой m в деревянном бруске массой M . Скорость u пули с бруском после удара найдем из закона сохранения импульса

$$mv = (m + M)u.$$

Механическая энергия в конечном состоянии

$$E_2 = \frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{m}{m + M} \frac{mv^2}{2}$$

меньше начальной энергии $E_1 = mv^2/2$. Увеличение внутренней, тепловой энергии равно убыли механической энергии:

$$Q = \Delta E_{\text{внутр}} = E_1 - E_2 = \frac{M}{m + M} \frac{mv^2}{2}.$$

Найденная убыль механической энергии равна модулю работы силы сопротивления при углублении пули: $Q = F_{\text{с}}s$. Измерив глубину проникновения пули s , можно вычислить величину силы сопротивления.

Если же в замкнутой системе происходят процессы, приводящие к превращению внутренней энергии тел в механическую (примеры: разрыв снаряда, адиабатическое расширение газа, работа двигателя внутреннего сгорания, работа человека и т.д.), то $\Delta E_{\text{внутр}} < 0$. Модуль этой величины называют *выделившейся энергией* и записывают закон сохранения энергии в виде

$$E_{\text{мех1}} + E_{\text{выд}} = E_{\text{мех2}}.$$

Пример 20. Вычислим, сколько внутренней (химической) энергии выделяется при разрыве снаряда массой m на два осколка массами m_1 и m_2 ($m_1 + m_2 = m$). Известны скорости осколков $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ и угол их разлета α (т.е. угол между $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$). Начальная механическая энергия равна $E_{\text{нач}} = \frac{mv^2}{2}$, где v — скорость снаряда до разрыва, конечная механическая энергия равна $E_{\text{кон}} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$. Начальную скорость снаряда найдем с помощью закона сохранения импульса: $m\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$. Применяя к векторному треугольнику (см. рис.19) теорему косинусов, получим

$$(mv)^2 = (m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2 - 2(m_1 u_1)(m_2 u_2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

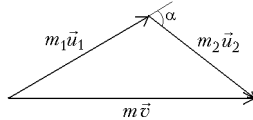


Рис. 19

Вычислив начальную и конечную энергии, выразим через них выделившуюся при разрыве энергию: $E_{\text{выд}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}$. Увеличение механической энергии происходит в этом случае за счет внутренней химической энергии порохового заряда. (Заметим, что массу этого заряда мы считали малой по сравнению с массой осколков, и его механической энергией мы пренебрегали.)

§ 4. Механика жидкостей и газов

Главное отличие жидкостей и газов от твердых тел заключается в их *текучести*, т.е. в способности течь, растекаться, легко изменять свою форму. Отметим различия между жидкостью и газом, существенные с точки зрения механики. Первое отличие — в плотности: у жидкостей она обычно во много раз больше, чем у газов. Но главное отличие жидкости от газа состоит в ее *несжимаемости*: легко изменяя форму, она сохраняет объем и плотность практически неизменными. Жидкость может занимать часть объема сосуда или находиться в открытом сосуде; в этих случаях мы видим четко выраженную границу между жидкостью и воздухом (ее называют свободной поверхностью жидкости). Напротив, газ не обладает фиксированной плотностью: помещенный в сосуд, он заполняет весь предоставленный ему объем. Это свойство газа иногда называют *летучестью*.

В дальнейшем мы для краткости будем говорить только о свойствах жидкостей, отмечая, где нужно, отличительные особенности газов.

Гидростатика изучает свойства жидкости в состоянии покоя, равновесия.

► **Текучесть жидкости и сила давления.** Рассмотрим силу, действующую со стороны жидкости в состоянии равновесия на плоский участок поверхности. Это может быть как поверхность постороннего тела (например, стенка сосуда), так и воображаемая поверхность, отделяющая одну часть жидкости от другой. Оказывается, эта сила (ее называют *силой давления*) может быть направлена только по нормали к поверхности (т.е. перпендикулярно к ней). Отсутствие сил, направленных по касательной к поверхности, объясняется свойством текучести: такая сила вызвала бы движение одних слоев жидкости относительно других.

► **Давление.** Если разделить силу давления F_d на площадь плоского участка S , то мы получим *среднее давление* на данной поверхности

$$p_{\text{ср}} = \frac{F_d}{S}.$$

Если уменьшать площадь участка, стягивая его к данной точке, то $p_{\text{ср}}$ стремится к определенному пределу, который называют *давлением в точке*, или просто *давлением*:

$$p = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{F_d}{S}.$$

В СИ давление выражают в *паскалях*: Па = Н/м².

► **Закон Паскаля.** При определении давления в точке мы использовали воображаемую плоскую поверхность, проходящую через эту точку. Но через данную точку жидкости можно провести множество различных плоскостей. Возникает вопрос: будем ли мы каждый раз, выбирая новую поверхность, получать новое значение давления в данной точке? Ответ дает *закон Паскаля*, который утверждает, что давление в данной точке жидкости не зависит от ориентации площадки. Поэтому можно говорить о давлении в точке и не оговаривать, о какой поверхности идет речь.

Закон Паскаля является следствием того факта, что сила давления перпендикулярна площадке, т.е. следствием *текучести* жидкости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два произвольных направления и выделим мысленно внутри жидкости маленькую равнобедренную призму, две равные грани которой перпендикулярны этим направлениям. (На рис. 20 оба выделенных направления лежат в плоскости чертежа.) Из условия равновесия этой «жидкой призмы» следует, что силы давления на боковые грани равны. Так как площади этих граней одинаковы, то из равенства сил следует равенство давлений.

Вопрос. Почему при исследовании равновесия призмы мы не учитывали силу тяжести?

Ответ. При уменьшении размеров призмы относительный вклад силы тяжести стремится к нулю. Например, при уменьшении всех размеров призмы в 2 раза силы давления уменьшаются в 4 раза, а сила тяжести — в 8 раз.

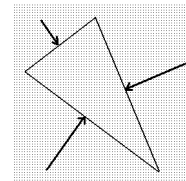


Рис. 20

► **Равновесие жидкости в поле тяжести. Давление столба жидкости.** Из условия равновесия однородной жидкости в поле тяжести следуют два утверждения.

1. Давление жидкости во всех точках, лежащих на одной горизонтали, одинаково.

2. При увеличении глубины на h давление возрастает на величину ρgh (ρ — плотность жидкости).

Для доказательства выделим в объеме жидкости воображаемый тонкий цилиндр, соединяющий точки A и B (рис. 21 а,б). Рассмотрим силы, действующие на этот цилиндр вдоль линии AB . Если

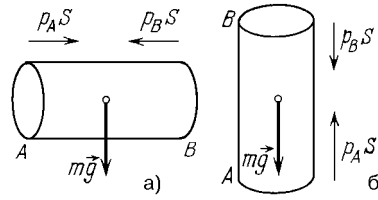


Рис. 21

точки A и B лежат на одной горизонтали (рис. 21 а), то таких сил только две: силы давления $p_A S$ и $p_B S$, приложенные к основаниям цилиндра. Из условия равновесия получаем $p_A S - p_B S = 0$, т.е. $p_A = p_B$. Если же цилиндр AB вертикален (рис. 21 б), то надо учитывать вклад силы тяжести, и условие равновесия принимает вид

$$p_A S - p_B S - mg = 0.$$

Так как плотность жидкости ρ постоянна, масса жидкости в цилиндре равна $m = \rho Sh$. Получаем

$$p_A - p_B = \rho gh. \quad (14)$$

Если давление на свободной поверхности жидкости равно p_0 , то для давления на глубине h имеем

$$p(h) = p_0 + \rho gh.$$

Давление p_0 называют *внешним давлением*, а член ρgh — *давлением столба жидкости*.

Если точки A и B находятся в разных частях сосуда, но в одной и той же жидкости, то формула (14) остается верной. Для доказательства достаточно соединить эти точки ломаной линией, все отрезки которой проходят по жидкости. Если поле тяжести отсутствует (или его влиянием можно пренебречь), то давление во всех точках жидкости одинаково и равно внешнему давлению.

Иногда именно это свойство жидкости — способность передавать давление без изменений во все точки — называют законом Паскаля.

Численный пример: давление столба воды. Атмосферное давление составляет в среднем $p_0 \approx 10^5$ Па. Так как плотность воды $\rho_v \approx 10^3$ кг/м³, то такое же давление создается столбом воды высотой $H_0 \approx 10$ м. К примеру, на глубине 20 м давление воды в 3 раза больше атмосферного, что представляет немалые трудности для организма ныряльщика.

Линейная зависимость давления от глубины позволяет в некоторых случаях легко определить силу давления. Самый простой случай — прямоугольная площадка, расположенная вертикально или наклонно, две стороны которой горизонтальны. Если одна из этих сторон находится на глубине h_1 , а другая — на глубине h_2 , то среднее давление столба воды равно

$$p_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\rho g h_1 + \rho g h_2}{2},$$

а сила давления равна $F = p_{\text{ср}} S$, где S — площадь рассматриваемой площадки. (Атмосферное давление обычно учитывать не надо, так как оно действует со всех сторон.) Например, сила давления на стенку аквариума шириной $l = 80$ см и высотой $h = 50$ см, доверху заполненного водой, равна $F = (\rho g h / 2) l h \approx 980$ Н.

► **Миллиметр ртутного столба.** Миллиметр ртутного столба — внесистемная единица измерения давления, равная давлению столба ртути высотой 1 мм: 1 мм рт. ст. ≈ 13600 кг/м³ · 9,8 м/с² · 10^{-3} м ≈ 133 Па. Давление p в мм рт. ст. численно равно высоте h (в мм) воображаемого столба ртути, давление которого $\rho g h$ равно p .

► **Гидравлический пресс.** Гидравлический пресс используется для значительного увеличения силы. Его устройство основано на следующих свойствах жидкости: а) способности передавать давление во все точки; б) несжимаемости; в) пропорциональности силы давления площади участка. Налитая в пресс жидкость взаимодействует с двумя поршнями: малым площадью S_1 , к которому прикладывают силу F_1 , и большим площадью S_2 , с которого «снимают» силу F_2 (рис. 22). При расчете прессы считают, что давление столь велико, что членом $\rho g h$ можно пренебречь, т.е. давление p одинаково во всех точках жидкости. Получаем первую формулу для расчета прессы

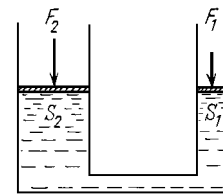


Рис. 22

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (p = \text{const}).$$

Вторая формула, связывающая между собой перемещения поршней l_1 и l_2 , выражает условие идеальности прессы, т.е. отсутствие

выигрыша или проигрыша в работе:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad (A = \text{const}).$$

Условие идеальности пресса связано с условием несжимаемости жидкости. Действительно, поделив второе уравнение на первое, получим условие сохранения объема

$$S_1 l_1 = S_2 l_2 \quad (V = \text{const}).$$

Для решения задач можно выбирать любые два уравнения из трех.

► **Сообщающиеся сосуды.** *Сообщающиеся сосуды* содержат одну или несколько несмешивающихся жидкостей. Одна из жидкостей является «общей»: перемещаясь вдоль нее, можно попасть из одного сосуда в другой. Соотношение между уровнями этой жидкости в различных сосудах определяется условием ее равновесия в поле тяжести: в пределах общей жидкости давление на одном и том же уровне в различных сосудах одинаково. Рассмотрим несколько случаев.

С л у ч а й 1. Одна жидкость, одинаковое внешнее давление. В этом случае свободные поверхности жидкости находятся на одинаковом уровне. Это свойство используют для контроля уровня недоступной глазу поверхности (пример — бочка с квасом).

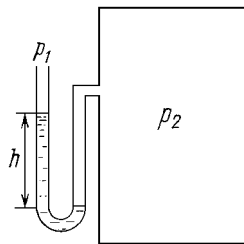


Рис. 23

С л у ч а й 2. Одна жидкость, различные внешние давления. Разность уровней h зависит от разности внешних давлений p_1 и p_2 (рис. 23). Приравнивая давления на том уровне, где находится нижняя свободная поверхность (внешнее давление p_2), получаем $p_2 = p_1 + \rho g h$. Если одно из давлений известно, то, измеряя разность уровней, можно найти другое, неизвестное, давление. На этом принципе основано устройство

жидкостного манометра, а также ртутного барометра — *трубки Торричелли*. (Манометром называют любой прибор для измерения давления жидкостей и газов. Барометр — прибор для измерения атмосферного давления.)

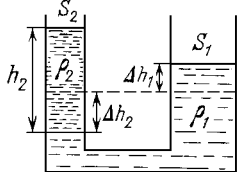


Рис. 24

С л у ч а й 3. Две разные жидкости, одинаковые внешние давления. Если поверх общей жидкости плотностью ρ_1 в один из сосудов налить жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$) высотой h_2 , то уровень общей жидкости в этом сосуде понизится на Δh_2 , а в другом повысится на Δh_1 (рис. 24).

Чтобы найти образовавшуюся разность уровней нижней жидкости h_1 ($h_1 = \Delta h_1 + \Delta h_2$), приравняем давления в

разных сосудах на том уровне, где находится граница между жидкостями:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2, \quad \text{т.е.} \quad \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Если сосуды имеют вертикальные стенки и известны площади их сечений S_1 и S_2 , то можно найти смещение уровней Δh_1 и Δh_2 . Для этого надо записать условие сохранения объема

$$\Delta h_1 S_1 = \Delta h_2 S_2$$

(из одного сосуда вытеснен объем $\Delta h_2 S_2$, в другом добавился объем $\Delta h_1 S_1$). Например, в U-образной трубке, где $S = \text{const}$, получаем $\Delta h_1 = \Delta h_2 = h_1/2$.

► **Атмосферное давление. Изменение давления с высотой.** Давление воздуха у поверхности Земли составляет $\approx 10^5$ Па. Хотя это давление довольно велико (сила давления на 1 см^2 равна $\approx 10 \text{ Н}$), обычно оно никак не проявляется, поскольку воздух действует на любой предмет со всех сторон.

Существование атмосферного давления было продемонстрировано в знаменитом опыте с магдебургскими полушариями (полушария было невозможно разъединить после того, как между ними откачали воздух) и в опыте Торричелли. Увеличивая высоту верхней, запаянной части трубки со ртутью (*трубка Торричелли*) над уровнем ртути в открытом сосуде, он наблюдал появление над ртутью в трубке безвоздушного промежутка (рис. 25). Давление в этом промежутке можно считать равным нулю (давление паров ртути ничтожно мало). По правилам сообщающихся сосудов давление столба ртути $\rho g h$ равно атмосферному давлению, т.е. высота столба h дает значение $p_{\text{атм}}$, выраженное в мм рт. ст. (730–780 мм рт. ст.; за внесистемную единицу *атмосфера* (атм) принято давление 760 мм рт. ст.).

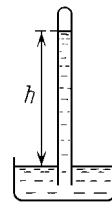


Рис. 25

Так же как и в случае жидкости, *давление воздуха изменяется с высотой* таким образом, чтобы обеспечить равновесие воздушного столба в поле тяжести. Для небольших высот, пока плотность воздуха почти постоянна, можно пользоваться формулой $p(h) = p_0 - \rho g h$. Плотность воздуха у поверхности Земли $\approx 1,2 \text{ кг/м}^3$, значит на высоте 100 м давление уменьшается на $\approx 1,2\%$. Если бы плотность воздуха не менялась, то высота атмосферы составила бы $\approx 8 \text{ км}$. Однако газ не обладает свойством несжимаемости — с уменьшением давления уменьшается и плотность воздуха. При удалении от Земли как давление, так и плотность плавно стремятся к нулю. Четкой границы у атмосферы нет, и хотя на высоте 30–40 км давление воздуха

становится во много раз меньше, чем у поверхности Земли, в разреженных слоях атмосферы (простирающихся до 1000 км!) происходит немало важных физических процессов (например, поглощение жесткого ультрафиолетового излучения в озоновом слое).

► **Закон Архимеда.** На тело, погруженное (полностью или частично) в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и численно равная весу жидкости в вытесненном телом объеме. *Выталкивающая сила (сила Архимеда)* есть результирующая всех сил давления, действующих на тело со стороны жидкости. Хотя на полностью погруженное тело жидкость действует со всех сторон, результирующая сил давления не обращается в нуль. Причина состоит в том, что в поле тяжести давление жидкости возрастает с глубиной, и силы давления, направленные вверх, оказываются больше, чем направленные вниз.

Так как зависимость давления от глубины нам известна, можно было бы рассчитать результирующую всех сил давления (т.е. доказать закон Архимеда прямым расчетом). Однако такой расчет был бы простым только для тела призматической формы (с горизонтальными основаниями). Воспользуемся иным методом: вместо погруженной части тела рассмотрим мысленно объем жидкости точно такой же формы (рис. 26). На него действуют две силы — сила Архимеда и сила тяжести, причем сила Архимеда, дей-

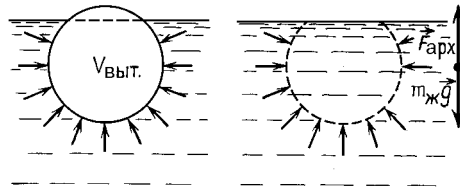


Рис. 26

ствующая на объем жидкости, равна силе Архимеда, действующей на тело. Но выделенный объем жидкости находится в равновесии. Значит, сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на жидкость в вытесненном объеме:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} V_{\text{выт}} g. \quad (15)$$

Вопрос. Чему равна выталкивающая сила, действующая на тело, помещенное на границе двух несмешивающихся жидкостей с разными плотностями?

Ответ. Надо мысленно разделить тело на две части по границе раздела жидкостей, по формуле (15) вычислить выталкивающую силу, действующую на каждую часть в соответствующей жидкости, и сложить эти силы:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж1}} V_{\text{выт1}} g + \rho_{\text{ж2}} V_{\text{выт2}} g.$$

Этот ответ может вызвать сомнения, так как, например, результирующая сил давления со стороны верхней жидкости направлена не вверх, а вниз. Действительно, этот ответ верен не для каждой из двух сил по отдельности, а для их результирующей. В этом легко убедиться, рассмотрев вместо погруженного тела воображаемый объем на границе жидкостей, который находится в равновесии.

Вопрос. Нарушится ли равновесие весов, на одной чаше которых стоит сосуд с водой, если в воду погрузить подвешенное на ниточке тело так, чтобы оно не касалось стенок и дна сосуда?

Ответ. Эта чаша весов опустится, так как по третьему закону Ньютона на воду со стороны погруженного тела будет действовать такая же по величине сила, как $F_{\text{арх}}$ (15), но направленная вниз.

Замечание. Закон Архимеда может оказаться неприменимым в том случае, если жидкость не имеет доступа ко всей поверхности погруженной части тела. Например, плотно прижатый к гладкому дну сосуда деревянный брусок не будет всплывать до тех пор, пока в пространство между ним и дном сосуда не проникнет вода.

► **Вес тела, погруженного в жидкость.** Если тело подвесить на динамометре и погрузить в жидкость, то показание динамометра уменьшится на величину, равную силе Архимеда. Результат такого измерения называют весом погруженного в жидкость тела:

$$P_{\text{погр}} = mg - F_{\text{арх}},$$

где m — масса тела.

Пример 21. Знаменитый пример применения закона Архимеда самим автором — легенда о том, как Архимед по просьбе царя Сиракуз определил содержание золота в короне, сделанной из золота и серебра. Для этого он взвесил корону дважды — в воздухе и после погружения в воду — и получил систему уравнений для m_z и m_c :

$$\begin{cases} P = (m_z + m_c)g, \\ \Delta P = \left(\frac{m_z}{\rho_z} + \frac{m_c}{\rho_c} \right) \rho_{\text{в}} g, \end{cases}$$

где ΔP — уменьшение веса при погружении в воду, равное выталкивающей силе. Отметим, что при использовании рычажных весов удобно взвешивать не корону, погруженную в воду, а ту воду, которую корона вытеснит из наполненного до краев сосуда, — ее вес как раз равен выталкивающей силе.

Пример 22. Выясним, как меняется энергия системы при изменении положения тела в жидкости. Рассмотрим медленный подъем камня массой m и объемом V со дна на поверхность. При перемещении на расстояние h внешняя сила совершает работу

$$A = Fh = (mg - F_{\text{арх}})h = mgh - (\rho_{\text{ж}}V)gh.$$

Однако увеличение потенциальной энергии камня равно mgh . Откуда же берется второй член? Он соответствует уменьшению потенциальной энергии воды. Дело в том, что в том объеме, который занимает тело, вода отсутствует. Значит, при перемещении тела из нижнего положения в верхнее вода в объеме, равном объему тела, как бы перемещается вниз (рис. 27), из верхнего положения в нижнее.

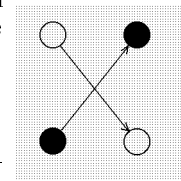


Рис. 27

► **Условие плавания тел на поверхности жидкости.** Плавающее тело находится в равновесии под действием двух сил: силы

тяжести mg и силы Архимеда $F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{выт}}$. Вытесненный телом объем — это объем погруженной его части, т.е. условие плавания имеет вид

$$mg = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр}} g, \quad \text{или} \quad m = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр}}.$$

Масса однородного тела плотности ρ равна ρV (V — объем тела), и условие плавания принимает вид

$$\frac{V_{\text{погр}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ж}}},$$

т.е. плотность тела должна быть меньше плотности жидкости (иначе тело утонет). Например, плотность льда составляет 0,9 плотности воды, из чего следует, что 90% объема айсберга скрыто под водой.

Пример 23. Выясним, на сколько изменится уровень воды в цилиндрическом сосуде площадью S при помещении в него плавающего тела массой m . Объем части сосуда, расположенной ниже уровня воды, увеличился, с одной стороны, на $S\Delta h$, а с другой — на объем погруженной части тела: $S\Delta h = V_{\text{погр}}$. Выражая $V_{\text{погр}}$ из условия плавания тела: $V_{\text{погр}} = m/\rho_{\text{в}}$, найдем изменения уровня воды $\Delta h = m/\rho_{\text{в}}S$. Полезно получить этот же результат другим способом, рассмотрев равновесие всего содержимого сосуда под действием силы тяжести и сил давления. Сила тяжести возросла на mg (масса воды не изменилась), а сила давления со стороны дна возросла на $\Delta p S = \rho_{\text{в}} g \Delta h S$. Так как равновесие не нарушилось, то $mg = \rho_{\text{в}} g \Delta h S$, откуда находим Δh .

Вопрос. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды, если лед растает?

Ответ. Нет, не изменится. Вода, получившаяся из льда, займет такой же объем, какой занимала погруженная часть льда.

► **Элементы гидродинамики.** Описание движущейся жидкости представляет собой значительно более трудную задачу. Жидкость обладает вязкостью, и поэтому между слоями жидкости и между жидкостью и стенками действуют силы внутреннего трения, или силы вязкости. Если при малых скоростях течение носит *ламинарный* характер, т.е. слои жидкости движутся не перемешиваясь друг с другом, то при увеличении скорости наступает сложный *турбулентный* режим течения, характеризующийся хаотическим движением жидкости и непрерывным перемешиванием слоев. Мы отвлечемся от этих трудностей и рассмотрим ламинарное течение абсолютно несжимаемой идеальной жидкости (в которой полностью отсутствуют силы трения). В каждой точке такой жидкости определено давление, не зависящее от ориентации площадки.

► **Движение жидкости по трубам.** При движении жидкости по трубе переменного сечения скорость жидкости меняется вдоль трубы, так как через любое поперечное сечение за одно и то же время Δt проходит одинаковый объем жидкости $\Delta V = S\Delta x = Sv\Delta t$.

Значит, скорости жидкости в разных сечениях трубы связаны соотношением, которое называют *уравнением неразрывности*:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

► **Зависимость давления жидкости от скорости течения.**

Итак, при сужении трубы скорость течения возрастает. Оказывается, при возрастании скорости жидкости ее давление уменьшается (см. рис. 28; чем меньше давление, тем меньше высота жидкости в манометрической трубке). Рассмотрим объем жидкости, заключенный в некоторый момент времени между сечениями

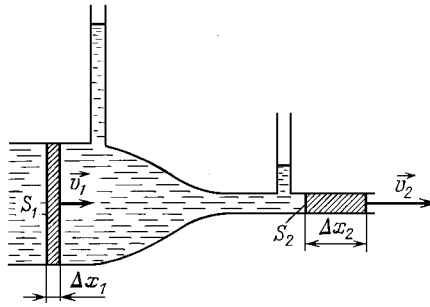


Рис. 28

S_1 и S_2 . Пусть за малый промежуток времени произошло перемещение задней границы на Δx_1 , а передней на Δx_2 . Так как жидкость идеальная, т.е. потерь на трение нет, то работа сил давления равна изменению кинетической энергии ΔE этого объема жидкости. При подсчете ΔE достаточно заменить объем $\Delta V = \Delta x_1 S_1$, находившийся у задней границы, на такой же объем $\Delta x_2 S_2$, примыкающий к передней границе. Получаем

$$(p_1 S_1) \Delta x_1 - (p_2 S_2) \Delta x_2 = \frac{(\rho \Delta V) v_2^2}{2} - \frac{(\rho \Delta V) v_1^2}{2}.$$

Сокращая на ΔV , получаем уравнение, выражающее связь между давлением жидкости и скоростью ее течения:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Если участки трубы находятся на разной высоте, то надо учесть изменение потенциальной энергии рассматриваемого объема жидкости. Получим *уравнение Бернулли*

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.}$$

Пример 24. Если в стенке широкого сосуда на глубине h сделать маленькое отверстие, то скорость истечения жидкости будет определяться выражением:

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

так как давления на поверхности жидкости и в струе равны атмосферному давлению, а скорость v_1 , с которой опускается уровень жидкости, пренебрежимо мала.

В случае вязкой жидкости давление вдоль горизонтальной трубы постоянного сечения не остается постоянным, так как для поддержания постоянной скорости необходима разность сил давления, компенсирующая силу трения жидкости о стенки трубы.

Глава 2. Молекулярная физика. Тепловые явления

§ 1. Молекулярная физика

► **Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ):**

- 1) все тела в природе состоят из молекул (атомов);
- 2) молекулы находятся в непрерывном хаотическом (беспорядочном) движении;
- 3) молекулы взаимодействуют между собой.

► **Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории.** Наиболее яркими и прямыми подтверждениями основных положений МКТ можно считать броуновское движение и диффузию.

Броуновское движение. *Броуновское движение* — это хаотическое движение микроскопических частиц в жидкости. Оно было открыто английским ботаником Р. Броуном, наблюдавшим в микроскоп движение спор в капле воды, а объяснено А. Эйнштейном, доказавшим, что такое движение происходит из-за ударов молекул воды о частицу (спору). Броуновское движение наблюдается не только в жидкостях, но и в газах («танец» пылинок в солнечном луче).

Диффузия. *Диффузия* — это движение молекул одного вещества в другом. В результате такого движения концентрация веществ выравнивается. Диффузия обусловлена хаотическим движением молекул, в результате которого они равномерно распределяются по всему объему.

Диффузия в газах происходит очень быстро, так как расстояние между молекулами и длина свободного пробега от одного столкновения до другого во много раз превышают размер молекул. Поэтому молекулы газа быстро перемещаются из одной части сосуда в

другую и заполняют весь предоставленный объем. Пример диффузии — распространение запахов, т.е. молекул, взаимодействующих с обонятельными рецепторами, по воздуху.

Диффузия в твердых телах происходит во много раз медленнее, чем в газах. Это связано с тем, что в твердых телах межмолекулярные силы удерживают молекулы (атомы) вблизи положений равновесия (узлов кристаллической решетки), и хаотическое движение молекул представляет собой беспорядочные колебания вокруг этих положений. И лишь изредка, после особенно сильных соударений с «соседями», молекула может покинуть узел кристаллической решетки и занять новое место.

Жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами. Молекулы здесь упакованы почти так же плотно, как и в твердых телах, и удерживаются межмолекулярными силами. Но кристаллической решетки, объединяющей все молекулы, в жидкости не образуется. В каждый момент времени жидкость можно представить как совокупность слабо связанных между собой микроскопических кристаллов, похожих на песчинки в детском ведрке. Однако через очень короткое время (порядка 10^{-9} с) эти кристаллы разрушаются и образуются новые, в результате чего молекула попадает в новый микрокристалл-песчинку и оказывается связанной с новыми соседями. Благодаря столь быстрому изменению структуры жидкость способна течь и принимать форму сосуда, в который она помещена. Связи между молекулами в жидкости не такие прочные, как в твердых телах, поэтому *диффузия в жидкостях* происходит намного быстрее, хотя и не так быстро, как в газах. Пример: если растворить в стакане чая кусок сахара, то через 1–2 дня остывший чай станет равномерно сладким, даже если его не перемешивать.

► **Взаимодействие молекул.** *Взаимодействие молекул* осуществляется силами притяжения и отталкивания, зависящими от расстояния между молекулами. Сопротивление твердых тел изменению их формы, несжимаемость и поверхностное натяжение жидкостей обусловлены межмолекулярными силами. Зависимость результирующей силы F и энергии U межмолекулярного взаимодействия от расстояния между молекулами r показана на рис. 29, где r_0 — расстояние между молекулами, на котором сила их взаимодействия равна нулю, а U_0 — энергия взаимодействия молекул, т.е. работа, которую нужно совершить, чтобы разорвать межмолекулярную связь. При малых значениях r ($r < r_0$) силы от-

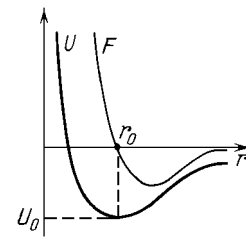


Рис. 29

толкания превышают силы притяжения. С этим связано сопротивление твердых тел и жидкостей сжатию. При увеличении r ($r > r_0$) приводит к тому, что силы притяжения становятся больше сил отталкивания. Силы межмолекулярного притяжения обуславливают поверхностное натяжение жидкостей и сопротивление твердых тел растяжению. Наконец, дальнейшее увеличение r ($r \gg r_0$) приводит к исчезновению и притяжения, и отталкивания.

► **Размеры атомов и молекул.** *Размер атомов*, т.е. расстояние r_0 , на котором существенно возрастает отталкивание между ними, составляет для всех веществ величину порядка 1 *ангстрема* ($1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ м}$). (Этот размер соответствует радиусу внешних электронных оболочек атомов.) *Размеры молекул* колеблются от $1\text{\AA}$ для одноатомных веществ до 1 мкм (10^{-6} м) для гигантских биомолекул (ДНК, РНК, некоторые белки).

► **Количество вещества.** *Количество вещества*, т.е. величину, пропорциональную числу молекул, измеряют в молях. *Моль* — это количество вещества, в котором содержится столько же атомов или молекул, сколько атомов углерода содержится в 0,012 кг углерода ^{12}C . Число молекул в 1 моле N_A называют *постоянной Авогадро*, $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Количество вещества или число молей ν , содержащихся в данной массе вещества m , можно найти по формуле

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}, \quad (1)$$

где N — число молекул вещества, а M — *молярная масса*, т.е. масса 1 моля вещества, численно равная отношению массы молекулы к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C (M можно определить по таблице Менделеева).

Пример 1. Масштабы чисел, определяющих число молекул, можно проиллюстрировать на следующем примере. Представьте, что вы вылили в океан стакан ($m = 200\text{ г}$) меченой воды, дождались, пока меченые молекулы разойдутся равномерно по всему Мировому океану, и зачерпнули воды этим же стаканом. Оценим, сколько меченых молекул попадет в стакан. Число меченых молекул воды в стакане равно $N = N_A m / M_v \sim 7 \cdot 10^{24}$ (молярная масса воды $M_v = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$). Для оценки объема воды в океане будем считать, что он заполняет всю поверхность Земли слоем толщиной $h = 5\text{ км}$: $V = 4\pi R_z^2 \cdot h$. В стакан попадет такая часть от числа меченых молекул, какую объем стакана $v = m/\rho_v$ составляет от объема океана: $v/V \sim 8 \cdot 10^{-23}$. Получаем, что в стакан попадет примерно 500 молекул.

► **Идеальный газ.** *Идеальный газ* — это газ, в котором взаимодействием молекул можно пренебречь. При достаточном разрежении все газы хорошо описываются этой моделью.

► **Основное уравнение МКТ.** Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает давление газа p с характеристиками хаотического движения молекул. По определению $p = F/S$, где F — сила, действующая со стороны молекул газа на

стенку сосуда площадью S . Будем считать, что сосуд имеет форму куба с ребром a . Найдем сначала F_1 — вклад в среднюю силу давления от одной молекулы, предполагая, что она движется свободно между стенками сосуда, не сталкиваясь с другими молекулами. По второму закону Ньютона (в проекции на ось x , перпендикулярную стенке)

$$F_1 = Z \frac{|\Delta(p_x)|}{\Delta t}.$$

Здесь $|\Delta(p_x)| = 2m_0|v_x|$ — изменение нормальной проекции импульса молекулы при ударе о стенку, m_0 — масса молекулы, $|v_x|$ — модуль проекции ее скорости на нормаль к поверхности, Z — число соударений молекулы со стенкой за время Δt . Число Z можно подсчитать по формуле: $Z = |v_x|\Delta t/2a$, так как движение до противоположной стенки и обратно (т.е. время между соударениями) составляет $2a/|v_x|$. Получаем:

$$F_1 = \frac{m_0 v_x^2}{a}.$$

Суммируя по всем N молекулам, находим:

$$F = \frac{m_0}{a}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2),$$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m_0}{V}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2),$$

где $V = Sa = a^3$ — объем сосуда. Подставляя $V = N/n$, где n — концентрация молекул, и учитывая, что, по определению среднего,

$$\frac{v_{x1}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N} = (v_x^2)_{\text{ср}},$$

имеем: $p = nm_0(v_x^2)_{\text{ср}}$. Так как все направления в пространстве равноправны (движение хаотическое!), то $(v_x^2)_{\text{ср}} = (v_y^2)_{\text{ср}} = (v_z^2)_{\text{ср}}$. С учетом равенства $(v_x^2)_{\text{ср}} + (v_y^2)_{\text{ср}} + (v_z^2)_{\text{ср}} = (v^2)_{\text{ср}}$ имеем $(v_x^2)_{\text{ср}} = (v^2)_{\text{ср}}/3$. Получаем *основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов*:

$$p = \frac{1}{3}nm_0(v^2)_{\text{ср}} = \frac{2nE_{\text{ср}}}{3}, \quad (2)$$

где $E_{\text{ср}} = m_0(v^2)_{\text{ср}}/2$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

► **Температура.** Если два тела находятся в контакте друг с другом и изолированы от других тел, то молекулы одного тела соударяются с молекулами другого, в результате чего происходит передача

импульса и энергии их хаотического движения. При этом более нагретое тело остывает, а более холодное — нагревается. Если этот процесс продолжается достаточно долго, то устанавливается *тепловое равновесие* и дальнейшего остывания и нагревания тел не происходит. Величина, характеризующая тепловое равновесие, называется температурой. Во всех частях системы, находящейся в состоянии теплового равновесия, температура одинаковая.

Температуру измеряют *термометрами*. Действие жидкостных (ртутных, спиртовых) термометров основано на тепловом расширении жидкостей при нагревании. Если за $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ принята температура таяния льда, а за $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ — температура кипения воды при нормальных условиях, то такая шкала температуры называется *шкалой Цельсия*.

Из *молекулярно-кинетической теории* следует, что значения средней кинетической энергии $E_{\text{ср}}$ поступательного движения молекул любых двух тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, равны. (Вывод этого утверждения выходит за рамки школьной физики.) Поэтому температура T — это величина, пропорциональная средней кинетической энергии хаотического движения молекул $E_{\text{ср}}$. Температуру определяют по формуле:

$$E_{\text{ср}} = \frac{3}{2}kT, \quad (3)$$

где величина $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К называется *постоянной Больцмана*; k — это переводной коэффициент между единицами механической энергии (джоуль) и температуры (*кельвин* — 1 К) в системе СИ. Единица температуры была выбрана таким образом, что $1\text{ К} = 1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Между температурными *шкалами Кельвина* и *Цельсия* существует простая связь: $T \approx t + 273$, где T и t — температуры по шкале Кельвина и Цельсия соответственно. Температуру T , измеренную по шкале Кельвина, называют также *абсолютной температурой*.

Опыт показывает, что абсолютная температура может принимать только положительные значения, — *абсолютный ноль температуры* $T = 0$ ($\approx -273\text{ }^{\circ}\text{C}$ по шкале Цельсия) недостижим, хотя к нему можно приблизиться как угодно близко. В настоящее время в низкотемпературных экспериментах удается достичь значений в десятые и даже сотые доли градуса Кельвина (рекордное значение, зафиксированное в книге рекордов Гиннеса, равняется $28 \cdot 10^{-11}$ К).

С точки зрения кинетической теории газов, абсолютный ноль температуры соответствует состоянию, в котором отсутствует движение молекул (см. определение (3)). Однако при низких температурах классическая модель идеального газа не действует (решающую роль начинают играть квантовые эффекты), и необходимо использовать более общее определение температуры. С точки зрения квантовой

теории, движение частиц может сохраняться и при $T \rightarrow 0$. Например, электроны в металлах не могут находиться в одинаковых квантовых состояниях (принцип запрета Паули). Они вынуждены занимать множество различных состояний с разными энергиями, и даже при $T = 0$ скорости электронов достигают 10^7 м/с.

► **Средняя скорость теплового движения.** Среднюю (точнее, средне-квадратичную) скорость теплового движения молекул $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}}$ можно выразить через давление и плотность газа, пользуясь формулой (2) (с учетом тождества $m_0 n = \rho$), или через температуру газа с помощью формулы (3):

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad \text{или} \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{ср}}}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (4)$$

Последнюю формулу можно привести к более удобному виду, если выразить массу молекулы $m_0 = M/N_A$ и обозначить $R = kN_A$ ($R \approx 8,31$ Дж/(К · моль) называют *универсальной газовой постоянной*):

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

► **Уравнение состояния идеального газа.** Равновесное состояние любого однородного тела характеризуется рядом параметров (p , V , T и др.). Эти так называемые *термодинамические параметры* не являются независимыми — их связывает *уравнение состояния*. Уравнение состояния может иметь очень сложный вид, и его получение для реальных веществ является важной задачей молекулярной физики. Уравнение состояния идеального газа можно вывести из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа (2) и определения температуры (3):

$$p = nkT \quad (5)$$

(уравнение состояния в форме Больцмана). Подставляя сюда $n = N/V$ и $k = R/N_A$ и учитывая, что $N/N_A = m/M$ (см. уравнение (1)), получаем *уравнение состояния в форме Менделеева-Клапейрона* (или просто *уравнение Менделеева-Клапейрона*):

$$pV = \frac{m}{M}RT. \quad (6)$$

Отношение m/V представляет собой плотность газа ρ , поэтому

$$p = \frac{\rho}{M}RT.$$

При решении некоторых задач такая запись уравнения состояния идеального газа оказывается более удобной.

Пример 2. Вычислим массу воздуха в комнате площадью $S = 20 \text{ м}^2$ и высотой $h = 3 \text{ м}$ при $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$. Из уравнения (6) получаем

$$m = \frac{pVM}{RT} \approx 70 \text{ кг}$$

(мы учли, что молярная масса воздуха равна $\approx 29 \text{ г/моль}$). Видно, что если давление остается постоянным (равным внешнему давлению), то при включении отопления масса воздуха в комнате уменьшается.

С помощью уравнения состояния (6) для данной массы газа m любую из трех величин T , p , V можно выразить через две остальные. Поэтому состояние газа можно изобразить точкой на координатной плоскости p , V . (Вместо координат p , V можно использовать и другие пары: p , T или V , T .) Любой равновесный процесс, происходящий с газом, представляется на такой плоскости в виде линии. Среди различных газовых процессов можно выделить такие, в которых одна из величин T , p или V поддерживается постоянной.

Изотермическими называются процессы, в которых температура постоянна: $T = \text{const}$. Для таких процессов из уравнения состояния следует закон *Бойля — Мариотта*:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

где индексы 1 и 2 относятся к начальному и конечному состояниям газа.

При *изохорных* процессах постоянным поддерживается объем газа: $V = \text{const}$. В этом случае уравнение состояния выражает закон *Шарля*:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

В *изобарных* процессах постоянно давление: $p = \text{const}$. Из уравнения состояния при этом следует закон *Гей-Люссака*:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Как следует из уравнения состояния (6), при любых изменениях состояния данной массы газа m выполняется *объединенный газовый закон* (уравнение Клапейрона)

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (7)$$

Графики изотермических, изохорных и изобарных процессов в различных координатах показан на рис. 30. На p , V -плоскости изотермические процессы представляются гиперболами. Чем больше

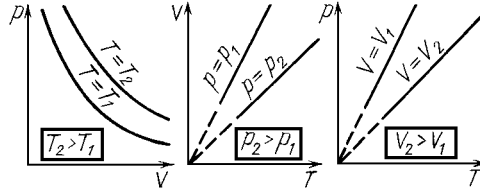


Рис. 30

температура, тем дальше отстоит гипербола — «изотерма» — от начала координат. Отметим, что в координатах V, T изобарные процессы представляются отрезками прямых, проходящих через начало координат. Аналогично выглядят графики изохорных процессов в координатах p, T .

Пример 3. Давление газа в вертикальном цилиндре площадью S с подвижным поршнем массой $m_{\text{п}}$ (рис. 31) можно найти из условия механического равновесия поршня:

$$pS = p_{\text{атм}}S + m_{\text{п}}g, \quad \text{или} \quad p = p_{\text{атм}} + \frac{m_{\text{п}}g}{S}.$$

Видно, что можно изменять давление газа меняя массу поршня (например, помещая на него грузы). Предположим, что мы увеличили абсолютную температуру газа на 10%. Так как давление газа не меняется, то объем газа также увеличится на 10%. Вычислим, груз какой массы m надо теперь положить на поршень, чтобы объем газа стал на 1% меньше первоначального. Запишем уравнение Клапейрона (формула (7)) для начального и конечного состояний газа:

$$\frac{p'(0,99V)}{1,1T} = \frac{pV}{T},$$

т.е. конечное давление равно $p' = (10/9)p$. Увеличение давления на поршень снизу должно быть уравновешено весом груза:

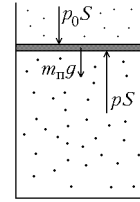


Рис. 31

$$mg = (p' - p)S = \frac{1}{9}pS = \frac{1}{9}(p_{\text{атм}}S + m_{\text{п}}g).$$

Например, при $S = 10 \text{ см}^2$, $m_{\text{п}} = 1 \text{ кг}$ получаем $m \approx 1,2 \text{ кг}$.

► **Закон Дальтона.** Давление смеси газов p можно представить в виде: $p = p_1 + \dots + p_n$, где n — число газов в смеси, а p_i — *парциальное давление* i -го газа ($i = 1, 2, \dots, n$), т.е. давление, которое оказывал бы на стенку сосуда i -ый газ, если бы других газов не было.

Пример 4. Под действием облучения четвертая часть молекул водорода диссоциировала на атомы при постоянной температуре. Вычислим, во сколько раз возросло при этом давление в сосуде. По закону Дальтона новое давление складывается из давления газа массой $0,75m$ с молярной массой M и давления газа массой $0,25m$ с молярной массой $M/2$:

$$p' = \frac{1}{V} \frac{0,75m}{M} RT + \frac{1}{V} \frac{0,25m}{M/2} RT = 1,25 \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT,$$

т.е. давление возросло на 25%.

Замечание. Еще удобней воспользоваться уравнением состояния в форме Больцмана (формула (5)). Видно, что давление газа зависит только от суммарной концентрации молекул, которая в результате диссоциации увеличилась на 25%.

§ 2. Термодинамика

► **Внутренняя энергия и теплота.** *Внутренняя энергия* тела U складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул, потенциальной энергии их взаимодействия и внутримолекулярной энергии. Внутренняя энергия может изменяться двумя способами:

1. За счет работы A , совершаемый над телом внешними силами.
2. За счет *теплообмена* с телами, имеющими другую температуру. Энергию, полученную телом в процессе теплообмена, называют *количеством теплоты* (*теплотой*) и обозначают буквой Q ($Q > 0$, если тело получает энергию).

► **Первый закон термодинамики** (закон сохранения энергии для тепловых процессов). Изменение внутренней энергии системы ΔU равно сумме работы A , совершенной над системой внешними силами, и теплоты Q , полученной им при теплообмене с другими телами, т.е. $\Delta U = A + Q$. В первом законе термодинамики удобно использовать не работу внешних сил над системой A , а работу системы против внешних сил $A^* = -A$:

$$Q = \Delta U + A^*. \quad (8)$$

(Полученная системой теплота идет на изменение ее внутренней энергии и на работу системы против внешних сил.) Этот закон часто называют первым началом термодинамики. Другая формулировка закона гласит, что невозможно создать *вечный двигатель первого рода*, производящий энергию без изменения состояния других тел. Первый закон является постулатом термодинамики, обобщающим экспериментальный опыт человечества.

Обратим внимание на то, что изменение внутренней энергии зависит только от начального и конечного состояния системы, а работа и количество теплоты зависят от того, как происходит процесс изменения состояния.

Рассмотрим подробнее каждый из членов, входящих в первый закон термодинамики.

* * *

► **Работа в термодинамике.** *Работу газа* (или жидкости) в равновесном процессе при малом изменении объема ΔV можно найти по формуле

$$\Delta A^* = p \Delta V \quad (9)$$

Для пояснения рассмотрим расширение газа в цилиндрическом сосуде (рис. 32). При перемещении поршня на малую величину Δh работа газа $\Delta A^* = F\Delta h$, где F — сила давления газа. Выражая F через давление газа p и площадь сечения поршня S , получаем:

$$\Delta A^* = F\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V,$$

где $\Delta V = S\Delta h$ — изменение объема газа. При расширении работа газа $A^* > 0$, а работа внешних сил $A < 0$.

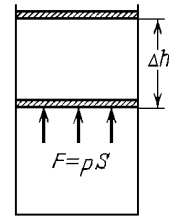


Рис. 32

При сжатии газа — наоборот: $A^* < 0$, а $A > 0$. Для произвольного процесса $p = p(V)$ работа газа A^* при расширении от объема V_1 до объема V_2 выражается интегралом

$$A^* = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

и численно равна площади криволинейной трапеции (рис. 33), ограниченной прямыми $V = V_1$, $V = V_2$, $p = 0$ и графиком функции $p(V)$. Например, если $p = \text{const}$, то $A^* = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$. Как уже отмечалось, работа зависит от того, какая кривая соединяет точки, соответствующие начальному и конечному состоянию газа. При возвращении в начальное состояние в результате замкнутого цикла работа газа не равна нулю, а равна площади внутри замкнутой кривой.

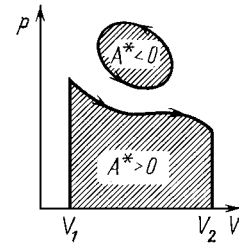


Рис. 33

Замечание. Если давление линейно зависит от объема, то криволинейная трапеция превращается в обычную, и работу можно вычислять по формуле

$$A^* = \frac{p_1 + p_2}{2} \Delta V,$$

где p_1 , p_2 — начальное и конечное давления.

* * *

► **Теплота.** Напомним, что теплота (количество теплоты) — это энергия, полученная телом при теплообмене с другими телами. *Теплообменом* называют процесс передачи энергии от более горячего тела к более холодному, происходящий без совершения механической работы, за счет обмена энергией на уровне отдельных молекул и атомов.

Существует три основных способа теплообмена.

► **Виды теплообмена.** Если тела с разной температурой привести в непосредственный контакт, то передача теплоты от нагретого тела к холодному будет происходить при соударениях их

молекул друг с другом. Такой вид теплообмена называется *теплопроводностью*. Пример: если взять в руку кусок льда, то рука будет мерзнуть, а лед — плавиться. Еще пример: если нагревать один конец железного бруска, то через небольшое время начнет нагреваться другой конец. Железо обладает хорошей теплопроводностью.

Однако передача теплоты может происходить и без непосредственного контакта между телами. Любое нагретое тело излучает электромагнитные волны, причем излучение тем сильнее, чем больше нагрето тело. Это излучение может поглощаться другим телом, и таким образом происходит передача энергии от одного тела к другому. Передача тепла при испускании и поглощении электромагнитных волн называется *излучением*. Пример: солнечное тепло передается на Землю в виде излучения, распространяющегося в вакууме и поглощаемого атмосферой и поверхностью Земли. Еще пример: сидя в стороне от костра, мы греемся его излучением.

Третий вид теплообмена — *конвекция* — это передача теплоты движущейся жидкостью или газом. Пример: батареи водяного отопления нагреваются циркулирующей в них горячей водой. Конвекция может возникать самопроизвольно — если нижние слои газа (или жидкости) нагреты сильнее, чем верхние. В этом случае за счет силы Архимеда происходит подъем вверх более легких нагретых слоев и опускание вниз более плотных холодных. Пример: вода в кастрюле быстро прогревается за счет конвективного перемешивания.

► **Теплоизолированная система.** Если система тел не обменивается теплом с внешними телами, то такая система называется *теплоизолированной*.

► **Теплоемкость.** Если с телом происходит процесс, сопровождающийся теплообменом и изменением температуры, то вводят *теплоемкость тела* (в данном процессе) как коэффициент пропорциональности между количеством теплоты Q , полученной телом, и изменением его температуры ΔT (при малом изменении температуры $Q \sim \Delta T$):

$$Q = C \Delta T = cm \Delta T = cm \Delta t, \quad (10)$$

где C — *теплоемкость тела* (измеряется в Дж/К), а c — *удельная теплоемкость* вещества однородного тела (измеряется в Дж/(кг · К)).

Удельную теплоемкость различных веществ (в жидкой и твердой фазах) для нагревания при постоянном (атмосферном) давлении и определенной температуре можно найти в таблицах. Опыт показывает, что в достаточно широком диапазоне температур

удельная теплоемкость меняется мало, поэтому формулу (10) при решении задач можно применять не только для малых, но и для достаточно больших ΔT . Так, удельная теплоемкость воды равна $\approx 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, а свинца $\approx 130 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Большая теплоемкость воды позволяет использовать водяные емкости в качестве тепловых резервуаров (например, в русской бане).

Численный пример. При охлаждении $0,2 \text{ кг}$ воды (одного стакана) от $t_1 = 100^\circ\text{C}$ до комнатной температуры $t_2 = 20^\circ\text{C}$ выделяется теплота $Q = cm|\Delta t| \approx 67 \text{ кДж}$. Если бы всю эту энергию можно было преобразовать в потенциальную энергию силы тяжести, то груз массой $M = 10 \text{ т}$ можно было бы поднять на высоту $h = Q/Mg \approx 67 \text{ см}$. Этот пример наглядно демонстрирует порядки величин, связанных с изменением внутренней (невидимой) энергии, по сравнению с привычными механическими значениями.

Вопрос. Желая скорее довести кастрюлю с водой до кипения, хозяйка подлила горячей воды из чайника. Правильно ли она поступила?

Ответ. Нет, не правильно. Вода закипит позже, так как горячую воду тоже надо довести до кипения, т.е. общее количество теплоты, которое надо передать кастрюле, стало больше.

► **Скрытые теплоты фазовых переходов.** Одно и то же с точки зрения химического строения вещество может находиться в разных агрегатных состояниях. При изменении внешних параметров (температуры, давления) агрегатное состояние может меняться, т.е. происходит переход вещества из одного состояния в другое (фазовый переход). Основные агрегатные состояния большинства веществ — твердое, жидкое и газообразное. Например, вода может существовать в виде льда, собственно воды и пара. Переход из твердой фазы в жидкую называется *плавлением*, обратный переход — из жидкой фазы в твердую — *кристаллизацией*; переход из жидкой фазы в газообразную называется *испарением* (парообразованием), а обратный переход — *конденсацией*. Переход из твердой фазы непосредственно (без плавления) в газообразную («испарение» твердого тела) называется *сублимацией*.

Проследим за тем, как происходит переход в новое агрегатное состояние, если медленно подводить к телу тепло при постоянном давлении. Сначала температура системы (жидкости, твердого тела) будет монотонно возрастать, количество затраченной теплоты будет определяться формулой (10). Затем, при достижении определенной температуры, она перестает меняться и начинается переход вещества в новое агрегатное состояние при постоянной температуре (рис. 34). Если до завершения перехода остановить подвод тепла, то система будет одновременно содержать два разных агрегатных состояния одного вещества (твердое тело + жидкость или жидкость + пар) в равновесии друг с дру-

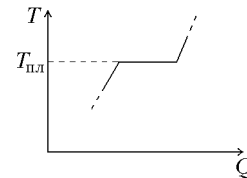


Рис. 34

гом. Если продолжить нагревание, то все вещество перейдет в новое агрегатное состояние, после чего температура снова будет возрастать.

Мы видим, что равновесный фазовый переход происходит при неизменной температуре. В случае плавления (или кристаллизации) эту температуру называют *температурой плавления*. Эта температура зависит (слабо) от внешнего давления. Для воды температура таяния льда при атмосферном давлении равна точно $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. В случае испарения (или конденсации) температуру равновесия между жидкостью и паром называют *температурой кипения* (о кипении мы расскажем чуть позже). Для воды при атмосферном давлении эта температура равна $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Теплоту, затраченную на фазовый переход при неизменной температуре, называют (*скрытой*) *теплотой фазового перехода*. Она пропорциональна массе вещества и выражается формулами

$$Q = r m \quad (11\text{ а})$$

для перехода жидкость – пар (испарение) и

$$Q = \lambda m \quad (11\text{ б})$$

для перехода твердое тело – жидкость (плавление). Феноменологические параметры r и λ называют *удельной теплотой парообразования* и *удельной теплотой плавления* соответственно. Для воды $r \approx 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг (при температуре кипения $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$), а удельная теплота таяния льда $\lambda \approx 3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг. При *конденсации*, т.е. обратном превращении пара в жидкость, система, наоборот, отдает теплоту перехода при той же постоянной температуре (температуре кипения): $Q = -rm$. Аналогично, при *кристаллизации*, т.е. обратном переходе из жидкого состояния в твердое, происходящем при температуре плавления, $Q = -\lambda m$.

► **Химические реакции. Горение.** При химических реакциях изменяются как энергия межмолекулярного взаимодействия, так и внутримолекулярная энергия, которая может быть во много раз больше; следовательно, меняется внутренняя потенциальная энергия тела. Протекание химической реакции сопровождается либо поглощением, либо выделением количества теплоты, пропорционального массе прореагировавшего вещества. Например, сгорание, т.е. соединение с кислородом, топлива массой m сопровождается передачей от топлива к внешним телам количества теплоты

$$Q = q m,$$

где q — *удельная теплота сгорания* (или удельная теплотворная

способность) топлива.

► **Уравнение теплового баланса.** В качестве примера использования формул (10)–(11) рассмотрим теплообмен между телами *теплоизолированной системы* (т.е. системы, не обменивающейся теплотой с другими телами). Теплообмен прекращается, когда все тела окажутся при одной и той же температуре T^* (температуре теплового равновесия). Закон сохранения энергии для такой системы имеет вид

$$\sum_i Q_i = 0 \quad (12)$$

(уравнение теплового баланса — энергия, отданная в виде теплоты одними телами, равна энергии, полученной другими телами).

Иногда уравнение теплового баланса пишут не в форме (12), а в виде уравнения $\sum \Delta U_i = 0$, что выглядит более естественной записью для закона сохранения энергии. Однако в случае теплоизолированной системы правильно записывать это уравнение именно через Q_i , а не через ΔU_i . Дело в том, что в процессе теплообмена тела системы совершают работу не только при взаимодействии друг с другом, но и против внешних сил. $\sum \Delta U_i$ в этом случае равна этой работе (с обратным знаком), т.е. отлична от нуля. Правда, в большинстве случаев (кроме процесса испарения) эта работа пренебрежимо мала, и можно использовать любую из форм записи уравнения теплового баланса.

Пример 5. Посмотрим, какая ошибка вносится в результат измерения температуры $m = 100$ г горячей воды ($t_{\text{в}} = 80$ °C) термометром с теплоемкостью $C = 5$ Дж/К за счет полученной им самой теплоты. Запишем уравнение теплового баланса

$$C(t^* - t_0) + c_{\text{в}}m(t^* - t_{\text{в}}) = 0,$$

где $t_0 = 20$ °C — начальная температура термометра, равная комнатной температуре. Решая уравнение, найдем температуру теплового равновесия $t^* = 79,3$ °C, которую покажет термометр.

Пример 6. В случае, когда в системе происходят фазовые превращения, решение задачи теплового баланса может быть многовариантным. Рассмотрим, например, теплообмен между паром массой m_1 при температуре $t_1 = 100$ °C и льдом массой m_2 при температуре $t_2 < 0$. Возможны следующие варианты ответа: а) Если пара очень много, то при конденсации только части пара выделится достаточно теплоты, чтобы нагреть лед до 0 °C, растопить его и нагреть получившуюся воду до 100 °C. Конечная температура будет 100 °C, в качестве неизвестного в уравнении теплового баланса будет выступать масса воды в конечном состоянии. б) При меньшем количестве пара в конечном состоянии будет вода при неизвестной температуре, лежащей в пределах от 0 °C до 100 °C. в) Пара еще меньше — в конечном состоянии будет смесь льда и воды при 0 °C. г) Пара совсем мало — в конце будет только лед при отрицательной температуре. Каждому из этих случаев соответствует свое уравнение теплового баланса со своим неизвестным. Разумно начать с предположения, что выполняется случай б). Уравнение теплового баланса для этого случая имеет вид:

$$-rm_1 + c_{\text{в}}m_1(t^* - t_1) + c_{\text{л}}m_2(0 - t_2) + \lambda m_2 + c_{\text{в}}m_2(t^* - 0) = 0,$$

где первые два члена будут отрицательными (пар отдает теплоту), а последние три — положительными. Если ответ для t^* будет лежать в пределах от 0 °C до 100 °C, то мы угадали правильно. Если t^* получится больше 100 °C, то это означает, что реализуется случай а). Если же t^* получится меньше 0 °C, то реализуется либо случай в), либо случай г), и надо продолжить исследование.

* * *

► **Внутренняя энергия.** Внутренняя энергия равновесного состояния зависит от термодинамических параметров, характеризующих это состояние (p , V , T , m , ν , ... — напомним, что эти параметры связаны уравнением состояния). Однако в явном виде (например, в виде формулы $U(p, T)$) выразить внутреннюю энергию жидкости или твердого тела через термодинамические параметры состояния нам не удастся — это представляет собой чрезвычайно сложную, до сих пор до конца не решенную задачу. Единственный пример, когда мы сможем (частично) справиться с такой задачей — идеальный газ. В остальных случаях нам придется прибегнуть к так называемому *феноменологическому подходу*, т.е. ввести для описания внутренней энергии специальные параметры, взятые из опыта.

Важное упрощение заключается в том, что в большинстве практических задач давление в системе не меняется (или меняется в пределах, где U от p почти не зависит). Для того же, чтобы выяснить, как изменяется внутренняя энергия *при постоянном давлении*, можно использовать первый закон термодинамики и формулы для работы тела и для количества теплоты, подводимой к телу в различных процессах.

► **ΔU при нагревании жидкостей и твердых тел.** Можно ожидать, что поскольку температура есть мера кинетической энергии молекул, то при увеличении температуры U будет монотонно возрастать. Чтобы узнать, как зависит U от T при постоянном (атмосферном) давлении, изменим температуру путем теплообмена с более горячим или более холодным телом. Так как тепловое расширение жидкостей и твердых тел очень мало, то работой A^* в формуле (8) можно в этом случае пренебречь. Значит, изменение внутренней энергии равно полученной теплоте Q , которую можно выразить (формула (10)) через экспериментально измеряемую величину — теплоемкость при постоянном (атмосферном) давлении:

$$\Delta U \approx C \Delta T = cm \Delta T. \quad (13)$$

Важное отличие формулы (13) для ΔU от формулы (10) для Q состоит в следующем. Формулу (13) можно применять не только в случае теплообмена, но при ином способе изменения температуры, например, при нагревании трением (напомним, что ΔU зависит только от начального и конечного состояния и не зависит от процесса перехода из одного состояния в другое).

Пример 7. Рассмотрим пример на *переход механической энергии во внутреннюю*. Пусть происходит неупругое лобовое столкновение двух одинаковых свинцовых шаров, причем один из них до удара покоился, а другой двигался со скоростью $v = 40$ м/с. Узнаем, на сколько градусов повысится температура шаров в результате

такого удара. Конечную скорость системы шаров находим из закона сохранения импульса: $mv = 2mu$, т.е. $u = v/2$. По закону сохранения энергии уменьшение механической энергии будет равно увеличению внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{mv^2}{2} - \frac{2mu^2}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Увеличение внутренней энергии приведет к нагреванию шаров:

$$\Delta U = c(2m)\Delta T,$$

т.е. $\Delta T = v^2/8c \approx 1,5 \text{ K}$. Хочется обратить внимание, что выражение "(при ударе) выделилось тепло" может обозначать не процесс теплообмена (в данном примере теплообмен отсутствует), а наличие тепловых процессов вообще. В случае неупругого удара внутренняя энергия каждого шара увеличивается за счет работы неконсервативных (пластических) сил.

► **ΔU при изменении агрегатного состояния.** При заданном внешнем давлении равновесный переход из одного состояния в другое происходит при постоянной температуре. Изменение внутренней энергии связано с тем, что молекулы разных агрегатных состояний обладают различной средней потенциальной энергией. Например, в результате *испарения* молекулы испарившейся жидкости становятся молекулами пара, где потенциальная энергия взаимодействия пренебрежимо мала. До испарения эти молекулы принадлежали жидкости, взаимодействовали с окружающими молекулами и обладали некоторой отрицательной (см. рис. 29) средней потенциальной энергией. Значит, при испарении должно происходить увеличение внутренней энергии, пропорциональное массе испарившейся жидкости. Аналогично, *плавление*, т.е. переход твердых тел в жидкое состояние, сопровождается уменьшением числа межмолекулярных связей и поэтому также приводит к увеличению внутренней энергии, пропорциональному массе расплавившегося вещества.

Если пренебречь работой системы при фазовом переходе, то изменение внутренней энергии при изменении агрегатного состояния будет равно (скрытой) теплоте перехода (формулы (11)), т.е.

$$\Delta U \approx \pm rm$$

для испарения и конденсации,

$$\Delta U \approx \pm \lambda m$$

для плавления и кристаллизации. Отметим, что эти формулы для изменения внутренней энергии, как и формула (13), имеют общий характер — их можно применять и тогда, когда причиной нагревания и фазового перехода является не теплообмен, а, например,

работа сил трения, сопротивления, пластических сил и т.д. (Пример — плавление и испарение вещества небольших метеоритов при их вхождении в плотные слои атмосферы.)

На самом деле при переходе в новое агрегатное состояние происходит изменение объема вещества. Значит, система совершает работу против внешнего давления. Например, при таянии льда происходит уменьшение объема, значит совершается отрицательная работа, а при испарении воды объем образовавшегося пара гораздо больше объема воды, и при расширении пар совершает положительную работу. Работу системы надо учитывать в уравнении (8) для первого закона термодинамики. В случае плавления эта поправка ничтожно мала. В случае испарения поправка на работу пара при его расширении не столь уж ничтожна.

Вычислим работу, совершаемую паром, образующимся при испарении $m = 1$ кг воды при температуре 100°C (373 K), и сравним ее с удельной теплотой парообразования. Давление пара остается постоянным, а изменение объема можно считать равным конечному объему пара, который мы найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$A^* = p(V_{\text{п}} - V_{\text{в}}) \approx pV_{\text{п}} = \frac{m}{M}RT.$$

Разделив на теплоту парообразования $Q = rm$, получим, что работа пара составляет $\approx 7,5\%$ от этой теплоты. На столько же отличается от теплоты парообразования изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = Q - A^* = rm - \frac{m}{M}RT = m \left(r - \frac{RT}{M} \right).$$

Отметим, что при решении школьных задач обычно это различие не учитывают, т.е. считают, что изменение внутренней энергии при переходе в новое агрегатное состояние равно теплоте перехода.

Пример 8. Продолжим изучение неупругого удара свинцовых шаров из Примера 7. Выясним, при какой начальной скорости налетающего шара они нагреются от начальной температуры $t_0 = 20^\circ\text{C}$ до температуры плавления свинца $t_{\text{пл}} = 323^\circ\text{C}$ и расплавятся (удельная теплота плавления свинца равна $\lambda = 22,5$ кДж/кг). Приравняем уменьшение механической энергии к увеличению внутренней энергии:

$$\frac{mv^2}{4} = c(2m)(t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda(2m),$$

откуда находим $v \approx 700$ м/с.

► **Внутренняя энергия идеального газа.** В случае *идеального газа* можно пренебречь взаимодействием молекул, т.е. внутренняя энергия идеального газа сводится к кинетической энергии поступательного и вращательного движения его молекул. (При высоких температурах начинает меняться и внутримолекулярная энергия — надо учитывать колебания атомов в молекуле.) Опыт показывает, что *внутренняя энергия идеального газа* зависит только от его температуры T (т.е. если изменяются объем и давление данной массы газа, а температура не меняется, то $U = \text{const}$). Для одноатомного газа (например, для любого инертного газа) внутренняя энергия равна энергии поступательного движения молекул, которая нам известна из молекулярно-кинетической энергии газов (см. уравнение (6)):

$$U = NE_{\text{ср}} = \nu N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (14)$$

Молекулярно-кинетическая теория позволяет обобщить уравнение (14) на случай любого, не только одноатомного, газа. Для этого вводят понятие *числа степеней свободы* молекулы газа, т.е. числа независимых параметров i , определяющих ее положение. К примеру, для одноатомной молекулы $i = 3$ (три координаты), для жесткой двухатомной молекулы (водород, кислород, азот при комнатной температуре) $i = 5$, так как добавляются два полярных угла, задающих направление оси молекулы, для жесткой многоатомной молекулы (например, вода) $i = 6$. Внутренняя энергия газа равна

$$U = N \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT$$

(на каждую степень свободы приходится энергия $kT/2$ в расчете на одну молекулу — это утверждение называют *теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы*).

Вопрос. Изменится ли внутренняя энергия воздуха в комнате при включении отопления?

Ответ. Нет, не изменится. Давление при нагревании остается постоянным, значит, как следует из уравнения состояния (6), масса воздуха в комнате должна уменьшиться настолько, чтобы произведение mRT/M не изменилось.

С учетом всего сказанного запишем изменение внутренней энергии идеального газа в виде

$$\Delta U = Lm\Delta T,$$

где L — коэффициент, значение которого в некоторых случаях предсказывает кинетическая теория газов. Оказывается, этот коэффициент имеет ясный физический смысл, его можно определять из опыта и рассматривать, как феноменологический параметр.

Для выяснения смысла коэффициента L рассмотрим *изохорное* ($V = \text{const}$) нагревание идеального газа. При изохорном нагревании работа газа равна нулю (стенки сосуда неподвижны), и первый закон термодинамики приобретает вид $Q = \Delta U = Lm\Delta T$. Сравнивая с определением теплоемкости (10), видим, что коэффициент L равен *удельной теплоемкости газа при постоянном объеме*, которую принято обозначать c_V . Приходим к выводу, что общее феноменологическое выражение для *изменения внутренней энергии идеального газа* имеет вид:

$$\Delta U = c_V m \Delta T. \quad (15)$$

В случае одноатомного газа из молекулярно-кинетической теории получаем (см. (14))

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{R}{M},$$

в более общем случае c_V выражается через число степеней свободы молекулы газа.

Отметим, что хотя для получения формулы (15) мы рассматривали изохорный процесс, она верна для любого процесса, так как

изменение внутренней энергии идеального газа определяется только начальной и конечной температурой. Опыт показывает, что в широком диапазоне изменения температуры c_V остается постоянной.

► **Процессы в идеальном газе с точки зрения термодинамики.** В отличие от жидкостей и твердых тел, работа газа не является пренебрежимо малой, и все три члена в первом законе термодинамики (8) сравнимы друг с другом и играют одинаково важную роль. Рассмотрим несколько основных процессов. (Изохорный процесс был рассмотрен выше.)

Изобарный процесс. При изобарном нагревании $p = \text{const}$. Такой процесс происходит, например, если газ в цилиндрическом сосуде находится под поршнем массой m (см. Пример 3). Работа газа

$$A^* = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T,$$

а изменение внутренней энергии $\Delta U = c_V m \Delta T$. Отсюда

$$Q = \Delta U + A^* = (c_V + \frac{R}{M}) m \Delta T,$$

т.е. *удельная теплоемкость газа при постоянном давлении c_p оказывается связанной с теплоемкостью c_V соотношением:*

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}.$$

При постоянном давлении к газу надо подводить больше теплоты, чем при постоянном объеме, так как часть теплоты идет на совершение газом работы при его расширении (изменение же внутренней энергии одинаково — оно зависит только от ΔT).

Изотермический процесс. При изотермическом расширении $\Delta U = 0$, а $A^* > 0$. Поэтому $Q > 0$, и газ получает теплоту. При изотермическом сжатии $A^* < 0$, а $Q < 0$, и газ отдает теплоту в окружающую среду.

Циклический процесс. В циклическом процессе работа газа A^* численно равна площади фигуры, ограниченной графиком процесса; причем $A^* > 0$, если цикл проходит по часовой стрелке, и $A^* < 0$, если направление обхода цикла противоположное (рис. 33). Так как по завершении цикла газ возвращается в прежнее состояние, то $\Delta U = 0$, и полученная за весь цикл теплота равна работе газа: $Q = A^*$.

Адиабатный процесс. Адиабатными называются процессы, происходящие без внешнего притока тепла: $Q = 0$. Из первого закона термодинамики следует, что для таких процессов $\Delta U = -A^*$.

График $p(V)$ для *равновесного адиабатного процесса* более крутой, чем для изотермического (рис. 35). Это следует из того, что при адиабатном расширении $A^* > 0$, а $\Delta U = c_V m \Delta T < 0$, т.е. в ходе адиабатного расширения газ охлаждается и точка, характеризующая его состояние, переходит на изотерму, соответствующую меньшей температуре. При быстром изменении объема сосуда (например, за счет движения поршня) газ не успевает обмениваться теплом со стенками сосуда, и процесс можно считать адиабатным.

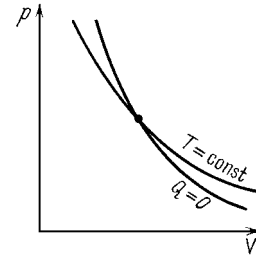


Рис. 35

Расширение газа в пустоту. Важно понимать, что описанные выше свойства адиабатного процесса связаны не только с теплоизоляцией системы, но и с возможностью газа совершать при расширении положительную работу над удаляющимся поршнем. Неожиданным для многих является утверждение, что при быстром *расширении идеального газа в пустоту* он не охлаждается. Пусть, например, газ занимает часть объема сосуда, в другой части которого находится вакуум. Если мгновенно убрать разделяющую перегородку, то газ быстро заполнит весь объем. Поскольку работа газа $A^* = 0$ (газ расширяется в пустоту, т.е. не совершает работу над другими телами) и $Q = 0$, то изменение внутренней энергии газа $\Delta U = 0$; следовательно, температура газа при его расширении в пустоту не изменяется.

► **Необратимость тепловых процессов.** Из повседневного опыта мы знаем, что не все процессы, допускаемые первым законом термодинамики, могут реализоваться в действительности. Например, тот факт, что при контакте двух тел тепло передается от горячего тела к холодному, не означает, что возможен обратный процесс передачи тепла от холодного тела к горячему. Дело в том, что практически все тепловые процессы необратимы: их нельзя пройти в обратном направлении, т.е. обратить во времени. *Обратимыми* являются только *равновесные* процессы, т.е. настолько медленные, что их можно представить как последовательность равновесных состояний.

► **Второй закон термодинамики.** Условие необратимости тепловых процессов выражает *второй закон термодинамики*.

Ф о р м у л и р о в к а 1. Невозможен такой процесс, единственным результатом которого была бы передача тепла от более холодного тела к более нагретому.

Ф о р м у л и р о в к а 2. Нельзя построить *вечный двигатель второго рода*, т.е. циклическую машину, которая полностью пре-

вращала бы в работу теплоту, полученную ею из некоторого теплового резервуара (например, Мирового океана).

Обе формулировки второго закона термодинамики эквивалентны, однако доказательство этого факта выходит за рамки элементарной физики.

► **Тепловые машины. Цикл Карно.** *Тепловые машины* — это двигатели, в которых рабочее тело (газ) совершает работу в ходе циклического процесса за счет полученного извне тепла. Для работы тепловой машины по циклическому процессу необходимо наличие как нагревателя — тела, от которого газ получает тепло, так и холодильника — тела, которому газ отдает избыточное тепло (иначе такая тепловая машина была бы вечным двигателем второго рода!).

Кэффициентом полезного действия (КПД) тепловой машины называется величина

$$\eta = \frac{A^*}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где A^* — работа газа в цикле, Q_1 — теплота, полученная от нагревателя, а Q_2 — теплота, отданная холодильнику (ΔU газа за цикл равно нулю, и из первого начала термодинамики следует, что $A^* = Q_1 - Q_2$). Французский ученый С. Карно доказал, что из всех тепловых машин, работающих в контакте с нагревателем T_1 и холодильником T_2 ($T_2 < T_1$) максимально возможный КПД, равный

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

достигается в равновесном (обратимом) *цикле Карно*, состоящем из двух изотерм с температурами T_1 и T_2 и двух адиабат. Теорема Карно является следствием второго закона термодинамики.

Холодильная машина, или просто *холодильник* — это тепловая машина, в которой работа внешних сил над газом (или другим рабочим телом) $A = -A^* > 0$ используется для переноса тепла от холодного тела (в бытовом холодильнике это морозильная камера) к более горячему (для бытового холодильника это окружающий воздух). Закон сохранения энергии для холодильника имеет вид $Q_1 = Q_2 + A$, где A — работа, совершаемая электрической сетью, к которой подсоединен холодильник (она выражается через среднюю мощность холодильника: $A = Pt$), Q_2 — теплота, отобранная от охлаждаемых продуктов, Q_1 — теплота, отданная окружающему воздуху. Видно, что включенный холодильник обогревает воздух в комнате.

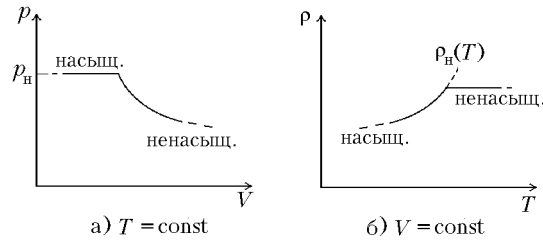


Рис. 36

► **Пар.** В тех случаях, когда газ образуется в результате испарения жидкости или может конденсироваться, его называют паром. Например, мы говорим, что в воздухе находится водяной пар (атмосферный воздух находится в контакте с водой морей, озер и рек), но не называем азот воздуха парами азота. В то же время над поверхностью жидкого азота в сосуде Дьюара присутствуют пары азота. Испарение жидкости происходит за счет того, что некоторые молекулы, находящиеся на ее свободной поверхности, преодолевают силы межмолекулярного притяжения и вылетают в пространство над жидкостью. С другой стороны, часть молекул пара, падающих на поверхность жидкости, «захватывается» этой жидкостью — пар конденсируется. Если пар над поверхностью жидкости не удалять (закрытый сосуд), то в системе жидкость-пар установится динамическое равновесие: число молекул, испаряющихся с поверхности в единицу времени, будет равно числу возвращающихся молекул. Такой пар называют *насыщенным*.

Плотность насыщенного пара ρ_n и его давление $p_n = \rho_n RT / M$ определяются условиями динамического равновесия, они зависят только от температуры жидкости и пара, т.е. при данной температуре не зависят от объема пара. Если при постоянной температуре медленно увеличивать объем сосуда, то плотность пара и его давление будут оставаться постоянными, т.е. пара будет все больше, а жидкости все меньше. Когда вся жидкость превратится в пар, его плотность и давление начнут уменьшаться обратно пропорционально объему (рис. 36 а); такой пар называют *ненасыщенным*.

При обратном изотермическом сжатии ненасыщенного пара он превратится в насыщенный и начнется конденсация жидкости.

Превратить ненасыщенный пар в насыщенный можно не только сжатием, но и охлаждением. Как показывает опыт, при увеличении температуры ρ_n возрастает. Если охладить сосуд с ненасыщенным паром до такой температуры T , при которой его плотность (она при изохорном охлаждении не меняется) станет равна плотности насыщенного пара $\rho_n(T)$, то начнется конденсация жидкости из пара (рис. 36 б).

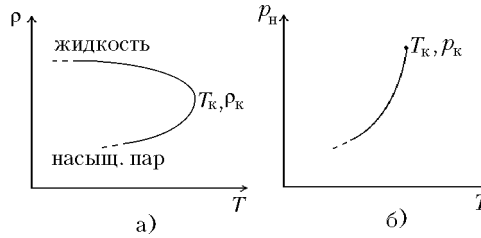


Рис. 37

► **Критическая температура.** На рис. 37 а изображены температурные зависимости плотности самой жидкости (верхняя кривая) и плотности ее насыщенного пара (нижняя кривая). Плотность жидкости уменьшается за счет теплового расширения, плотность пара, наоборот, возрастает. При некоторой температуре T_k , которую называют *критической температурой*, плотности жидкости и насыщенного пара сравниваются, т.е. различие между ними полностью исчезает. При $T > T_k$ не существует состояния, содержащего пар в равновесии с жидкостью, — при любом сжатии вещество будет оставаться однородным. Поэтому состояние при $T > T_k$ называют иногда истинно газовым (хотя этот «газ» может быть очень плотным), в отличие от насыщенного или ненасыщенного пара при $T < T_k$ (другой, более строгий взгляд на обсуждавшееся выше различие между паром и газом). На рис. 37 б изображена зависимость давления насыщенного пара p_n от температуры. Точка обрыва графика соответствует критической температуре, давление p_k в этой точке называют *критическим давлением* (или давлением в критической точке).

При температурах, далеких от T_k , пока плотность пара мала по сравнению с плотностью жидкости, давление p_n можно вычислять по формуле Менделеева—Клапейрона, но при приближении к T_k уравнение состояния идеального газа становится неприменимым, и надо использовать более сложное уравнение состояния реального газа.

Приведем критические параметры ряда веществ. Для воды $t_k = 374,15^\circ\text{C}$, $p_k = 221,1$ атм, $\rho_k = 315$ кг/м³, для азота $t_k = -147,1^\circ\text{C}$, $p_k = 33,9$ атм, для кислорода $t_k = -118,8^\circ\text{C}$, $p_k = 50,3$ атм, для водорода $t_k = -239,8^\circ\text{C}$, $p_k = 13$ атм, для гелия $t_k = -267,9^\circ\text{C}$ (5,25 К), $p_k = 2$ атм. Видно, что все основные газы, составляющие земную атмосферу, могут быть сжижены только в специальных лабораторных условиях.

► **Влажность.** *Абсолютной влажностью* воздуха называют плотность водяного пара в нем ρ_n . Парциальное давление пара

$$p_n = \frac{\rho_n}{M} RT$$

иногда называют упругостью водяного пара ($M = 18$ г/моль — мо-

лярная масса воды). *Относительная влажность* воздуха θ — это отношение парциального давления пара к давлению насыщенного пара при той же температуре

$$\theta = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н}}}.$$

Поскольку давление насыщенного пара $p_{\text{н}} = \rho_{\text{н}} RT/M$, то

$$\theta = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{н}}}.$$

При охлаждении ненасыщенного водяного пара с абсолютной влажностью $\rho_{\text{п}}$ до такой температуры T , при которой $\rho_{\text{н}}(T) = \rho_{\text{п}}$, начнется процесс конденсации. Эту температуру называют *точкой росы* (для данной абсолютной влажности $\rho_{\text{п}}$).

► **Кипение.** Кипение — это процесс интенсивного испарения жидкости в объеме, сопровождающийся образованием и ростом пузырьков и активным перемешиванием жидкости. Чтобы понять, почему происходит кипение, рассмотрим условия равновесия парового пузырька, случайно оказавшегося в жидкости. Давление жидкости на поверхности пузырька $p = p_0 + \rho gh$, где p_0 — внешнее (атмосферное) давление, ρ — плотность жидкости, а h — глубина, на которой находится пузырек. Давление пара в пузырьке равно давлению насыщенного пара $p_{\text{н}}$ при данной температуре. Если $p > p_{\text{н}}$, то пузырек быстро схлопнется. Если же $p < p_{\text{н}}$, то пузырек начнет расширяться, причем из-за испарения с его поверхности давление в нем будет оставаться равным $p_{\text{н}}$. Растущий пузырек будет всплывать на поверхность, поскольку сила Архимеда намного превосходит силу тяжести, и приводить в движение окружающие слои жидкости — начнется кипение. Температуру $T_{\text{кип}}$, при которой давление насыщенного пара сравнивается с атмосферным, называют *температурой кипения*. При нормальном давлении атмосферы $p_0 = 10^5$ Па температура кипения $t_{\text{к}} = 100$ °С. Это означает, что давление насыщенного водяного пара при 100 °С равно 10^5 Па. Уменьшение атмосферного давления приводит к снижению температуры кипения, а увеличение p_0 — к повышению $T_{\text{кип}}$ (см. рис. 37б). На вершине Эвереста атмосферное давление равно $\approx 3 \cdot 10^4$ Па, и вода кипит при 70 °С. В кастрюле-сковороде давление равно $\approx 1,8 \cdot 10^5$ Па, поэтому кипение воды и приготовление пищи в такой кастрюле происходит при 117 °С.

Вопрос. В бак с кипящей водой опускают кастрюлю с водой так, чтобы она не касалась дна и стенок бака. Закипит ли вода в кастрюле?

Ответ. Нет, не закипит. Для поддержания процесса кипения требуется постоянный приток теплоты, обеспечивающий интенсивное испарение во всем объеме. Вода в баке имеет температуру 100 °С, поэтому, когда вода в кастрюле нагреется до 100 °С, приток тепла к ней прекратится.

► **Поверхностное натяжение жидкостей.** У молекул, находящихся на свободной поверхности жидкости, число «соседей», а значит и число межмолекулярных связей меньше, чем у молекул, находящихся в объеме. Кроме того, средняя энергия связи у поверхностных и внутренних молекул жидкости тоже различна. Поэтому жидкость обладает *поверхностной энергией* $E_{\text{пов}}$, пропорциональной площади S свободной поверхности жидкости:

$$E_{\text{пов}} = \sigma S. \quad (16)$$

Величина σ называется *коэффициентом поверхностного натяжения* жидкости. Для воды $\sigma = 75,6$ мН/м при 0°C и $\sigma = 60,8$ мН/м при 90°C .

Работа A , совершаемая при изотермическом увеличении площади поверхности жидкости на ΔS , равна $A = \sigma \Delta S$. Если поверхность жидкости прямоугольная, то $\Delta S = l \Delta x$, где l — ширина прямоугольника, а Δx — перемещение. В этом случае $A = F \Delta x$, где $F = \Delta E_{\text{пов}} / \Delta x$ — сила, действующая против силы поверхностного натяжения $F_{\text{пов}}$, стремящейся уменьшить площадь свободной поверхности жидкости. Эта сила направлена по касательной к поверхности, перпендикулярно к линии границы участка поверхности, на который она действует. Из формулы (16) следует, что *сила поверхностного натяжения* пропорциональна длине границы участка поверхности жидкости: $F_{\text{пов}} = \sigma l$.

Вопрос. Опыт показывает, что при увеличении температуры коэффициент поверхностного натяжения уменьшается. Как вы думаете, при какой температуре $\sigma(T)$ обратится в ноль?

Ответ. При критической температуре, когда исчезнет различие между жидкостью и паром.

Молекулы жидкости взаимодействуют не только между собой, но и с молекулами стенки сосуда. В зависимости от соотношения поверхностных энергий на различных границах (жидкость — пар, жидкость — твердое тело и твердое тело — пар) форма поверхности жидкости вблизи твердой стенки (мениск) выглядит по-разному (рис. 38). Наибольший интерес представляют два крайних случая. При полном *смачивании* жидкость стремится увеличить площадь своего контакта со стенкой (это приводит к уменьшению полной поверхностной энергии). В случае, когда жидкость *не смачивает* стенку, эта площадь минимальна.

► **Капиллярные явления.** В узких капиллярах мениск имеет форму полусферы, выпуклой вниз для смачивающей жидкости и выпуклой вверх для несмачивающей жидкости (рис. 38). Кроме сил давления со стороны жидкости и атмосферного воздуха на поверхность жидкости действует сила поверхностного

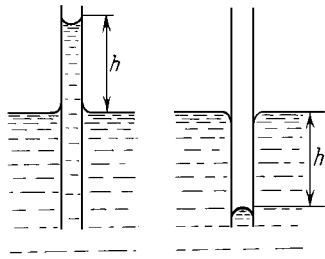


Рис. 38

натяжения $F_{\text{пов}} = 2\pi R\sigma$, где R — радиус капилляра. Если жидкость смачивает стенку, то $F_{\text{пов}}$ направлена вверх. Поэтому жидкость в капилляре поднимается на высоту h . Ее можно найти, приравняв $F_{\text{пов}}$ силе тяжести, действующей на столб жидкости высотой h :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R},$$

где ρ — плотность жидкости. Если жидкость не смачивает стенку, то сила поверхностного натяжения $F_{\text{пов}}$ будет направлена вниз. Уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину h , которую можно найти по этой же формуле.

► **Твердые тела.** Твердые тела бывают *кристаллическими* и *аморфными*. Кристаллическими называют тела, в которых молекулы и атомы расположены в строго чередующемся порядке и образуют правильную *кристаллическую решетку*. Ячейка кристаллической решетки — элементарная повторяющаяся единица — может иметь простую геометрию и содержать всего несколько атомов (алмаз, поваренная соль), а может быть весьма сложной и содержать сотни тысяч атомов (кристаллы биополимеров). К кристаллическим телам относятся металлы, многие природные минералы и другие вещества.

В аморфных телах кристаллической решетки, связывающей между собой все атомы, нет, хотя каждый атом и молекула прочно связаны с соседними. Аморфные твердые тела во многом близки к жидкостям. К ним относятся стекло, резина, пластмассы.

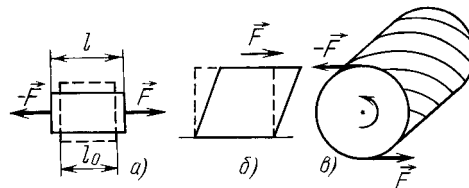


Рис. 39

Отличие твердых тел от жидкостей состоит в том, что они сопротивляются деформации — изменению своей формы. Примеры различных видов деформации — растяжения, сдвига и кручения — показаны на рис. 40. Рассмотрим простейшую деформацию — растяжение. Пусть к цилиндру длиной l_0 и площадью S поперечного сечения приложены растягивающие силы F (рис. 39 а). Величину

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где l — длина растянутого цилиндра, называют *относительной деформацией*, а величину $\sigma = F/S$, имеющую размерность давления — *напряжением*. Типичная зависимость σ от ε показана на рис. 40.

При малых деформациях напряжение пропорционально деформации, и после снятия нагрузки форма тела восстанавливается. Такие деформации называют *упругими*. Для них выполняется *закон Гука*

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где коэффициент пропорциональности E — *модуль Юнга*, который не зависит от размеров образца и определяется лишь свойствами материала, из которого он изготовлен. Модуль Юнга имеет размерность давления и измеряется в паскалях. Для металлов модуль Юнга по порядку величины равен 10^{11} Па. Дальнейшее увеличение деформации приводит к тому, что зависимость $\sigma(\varepsilon)$ становится нелинейной, и снятие нагрузки приводит к неполному восстановлению формы тела.

Такие деформации называются *пластическими*. Наконец, при достижении некоторых значений ε и σ (предел прочности) образец разрушается.

Вопрос. Как жесткость k (см. стр. 17) упругого стержня выражается через его размеры и модуль Юнга?

Ответ. Подставляя в закон Гука выражения для σ и ε , получим, что $k = ES/l$.

► **Тепловое расширение жидкостей и твердых тел.** При повышении температуры жидкостей или твердых тел обычно происходит увеличение их объема.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории тепловое расширение тел, имеющих простое молекулярное строение, можно качественно объяснить на основе кривой межатомного взаимодействия (рис. 29). При большей температуре амплитуда колебаний атомов около положения равновесия становится больше. Пока колебания происходят около дна потенциальной кривой, среднее расстояние между атомами остается равным r_0 . При увеличении их амплитуды центральная точка колебаний смещается вправо от положения равновесия, т.е. среднее расстояние между атомами возрастает.

Для описания зависимости объема от температуры (при постоянном давлении) используют приближенную линейную формулу

$$V = V_0(1 + \beta t),$$

где t — температура по шкале Цельсия, V_0 — объем при 0°C , β — *температурный коэффициент объема*. Видно, что он равен относительному увеличению объема при нагревании на один градус.

Для ртути $\beta \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$ 1/К, для большинства жидкостей β лежит в пределах $5\text{--}15 \cdot 10^{-4}$ 1/К. Для твердых тел определяют также *температурный коэффициент длины* α , описывающий зависимость линейных размеров тела от температуры:

$$l = l_0(1 + \alpha t).$$

Например, для меди $\alpha \approx 16,7 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Для *изотропных* веществ линейные размеры изменяются одинаково по всем направлениям, т.е. $1 + \beta t = (1 + \alpha t)^3$. Учитывая малость α , получаем соотношение между α и β для твердых тел: $\beta \approx 3\alpha$.

Одно из самых распространенных в природе веществ — вода — проявляет аномальное поведение в зависимости объема от температуры. Во-первых, плотность воды при 0 °С больше, чем плотность льда, а для большинства веществ плотность при плавлении уменьшается. Во-вторых, при нагревании воды от 0 °С до 4 °С ее объем не увеличивается, а уменьшается, т.е. плотность воды имеет максимальное значение при 4 °С. Оба этих аномальных свойства играют большую роль в зарождении и поддержании жизни на Земле. К моменту начала замерзания водоемов температура воды на поверхности 0 °С, а температура более глубоких (более плотных) слоев воды возрастает с глубиной до 4 °С. Дальнейшее охлаждение воды идет без конвекции, только за счет теплопроводности, т.е. очень медленно. Образовавшийся на поверхности лед имеет плотность меньшую, чем плотность воды, и поэтому не опускается на дно водоема.

Глава 3. Электродинамика

► **Электрический заряд.** *Электрический заряд* — физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Свойства заряда:

1. Носителями электрического заряда являются заряженные элементарные частицы — *протон* и *электрон* (а также некоторые нестабильные частицы: π -мезоны, μ -мезоны и др.). Заряженные частицы взаимодействуют друг с другом с силами, убывающими с расстоянием так же медленно, как гравитационные, но во много раз превышающими их по величине.

2. Все заряженные элементарные частицы обладают одним и тем же по величине зарядом, который называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e . Опыт показывает, что заряд элементарных частиц не зависит от их скорости.

3. Заряд элементарных частиц может быть положительным или

отрицательным. Одноименно заряженные частицы отталкиваются, разноименно — притягиваются. За положительный заряд принят заряд протона $+e$. Заряд электрона — отрицательный $(-e)$.

► **Заряженные тела.** Если в состав макроскопического тела входит различное количество электронов N_e и протонов N_p , то оно оказывается заряженным. Заряд тела всегда представляется числом, кратным величине элементарного заряда: $q = e(N_p - N_e)$.

► **Закон сохранения заряда.** *Закон сохранения электрического заряда* утверждает, что полный заряд замкнутой системы (т.е. алгебраическая сумма зарядов всех тел) постоянен. Это утверждение очевидно, если в системе не происходит превращений элементарных частиц. Но закон сохранения заряда имеет более фундаментальный характер — он выполняется в любых процессах рождения и уничтожения элементарных частиц.

§ 1. Электростатика

Электростатика — раздел электродинамики, посвященный изучению покоящихся электрических зарядов.

► **Закон Кулона.** *Закон Кулона* описывает взаимодействие точечных зарядов, т.е. элементарных частиц или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Полная формулировка закона Кулона включает в себя три утверждения.

1. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме (кулоновская сила) прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

2. Силы взаимодействия направлены вдоль прямой, соединяющей заряды (такие силы называют *центральными*).

3. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.

Электростатическое взаимодействие удовлетворяет *принципу суперпозиции* — сила взаимодействия с несколькими точечными зарядами равна векторной сумме сил взаимодействия с каждым из зарядов (заряды действуют независимо друг от друга).

► **Влияние среды.** Если точечные заряды находятся в однородном диэлектрике, то можно приближенно считать, что сила взаимодействия (1) уменьшается в ϵ раз, где ϵ — характеристика среды,

которую называют *диэлектрической проницаемостью*.

► **Единица заряда.** В СИ основной единицей является единица силы тока — *ампер*, определяемый через магнитное взаимодействие токов. Поэтому единица заряда, которую называют *кулон* (Кл), является производной и определяется так: 1 Кл — заряд, проходящий за 1 с через сечение проводника при токе в 1 А. Коэффициент k в законе Кулона численно равен силе взаимодействия двух зарядов в 1 Кл, находящихся на расстоянии 1 м: $k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. *Элементарный заряд* в СИ равен $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Вместо коэффициента k часто используют *электрическую постоянную* $\varepsilon_0 = 1/4\pi k \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$. Закон Кулона в этом случае имеет вид (с учетом влияния среды)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}.$$

Численный пример. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в 1 Кл каждый, помещенных на расстоянии 1 м друг от друга, равна $9 \cdot 10^9 \text{ Н}$ (вес 900 тыс. тонн груза). Видно, что такие «единичные» заряды не могут появляться в электростатических задачах (обычно имеем дело с мкКл, нКл и т.д.). Кулоны возникают, например, при подсчете заряда, прошедшего через сечение проводника при протекании тока.

Вопрос. Почему говорят, что электромагнитное взаимодействие гораздо сильнее, чем гравитационное? Казалось бы, повседневный опыт учит нас другому — сила тяжести знакома нам с первых шагов (и падений), а с электрическими силами мы сталкиваемся крайне редко.

Ответ. Главное отличие электромагнитного и гравитационного взаимодействий состоит в том, что гравитационные «заряды» (массы) всегда одного знака и соответствуют только притяжению, а электрические заряды двух знаков — положительные и отрицательные. В макроскопическом теле обычно соблюден практически точный баланс между числом электронов и числом протонов, и электростатическое взаимодействие не проявляется. Если бы все заряды стали вдруг одного знака, то 1 г вещества имел бы заряд $\sim 50\,000 \text{ Кл}$ (надо сначала оценить число протонов и электронов — сделайте это сами). Чтобы сравнить электрическое и гравитационное взаимодействия, надо найти отношение этих сил для двух протонов. Проверьте, что это отношение не зависит от расстояния между зарядами и равно $\approx 1,2 \cdot 10^{36}$.

► **Электрическое поле.** Взаимодействие заряженных частиц можно описывать двумя способами.

1. Один заряд через пустое пространство непосредственно действует на другой заряд (*дальнодействие*).

2. Взаимодействие передается через посредство *электромагнитного поля*. На заряд действуют не другие заряды, а поле, находящееся в той же точке пространства (*близкодействие*). Остальные заряды выступают в роли источников этого поля.

Отметим, что в рамках электростатики оба подхода совершенно эквивалентны. Однако при переходе к описанию движущихся зарядов дальнодействие встречается с непреодолимыми трудностями. Главная из них заключается в том, что при смещении одного заряда сила, действующая на другой заряд, не может измениться

мгновенно, а только через какое-то конечное время (явление запаздывания). Иначе было бы нарушено одно из основных положений специальной теории относительности Эйнштейна — о невозможности передачи информации со скоростью, большей скорости света в вакууме. Это значит, что в пространстве между зарядами должен находиться материальный посредник (поле), осуществляющий передачу сигнала с конечной скоростью. В вакууме эта скорость равна скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Самым простым видом электромагнитного поля является *электростатическое поле*, создаваемое неподвижными зарядами. Вычисление силы, действующей на точечный заряд q со стороны зарядов $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$, разбивается на два этапа: 1) вычисление поля зарядов $Q_1, \dots, Q_N$ и 2) вычисление силы, действующей на заряд q со стороны этого поля. Видно, что электрический заряд может теперь выступать либо в качестве источника поля (заряды $Q_1, \dots, Q_N$), либо в роли заряда во внешнем поле, на который это поле действует (заряд q). В последнем случае заряд называют *пробным* (им как бы испытывают внешнее поле).

► **Напряженность электрического поля.** Из закона Кулона следует, что сила $\vec{F}_q$, действующая на пробный заряд q , пропорциональна величине этого заряда. Значит, отношение $\vec{F}_q/q$ не зависит от q , т.е. является характеристикой поля. Ее называют напряженностью и обозначают буквой $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{F}_q/q \quad (\text{или} \quad \vec{F}_q = q\vec{E}). \quad (2)$$

Видно, что само определение напряженности решает задачу о вычислении силы, действующей на заряд q во внешнем поле $\vec{E}$. В СИ напряженность выражают в Н/Кл.

Из закона Кулона и формулы (2) следует, что *напряженность электростатического поля*, создаваемого *точечным зарядом* Q на расстоянии r от него, может быть найдена по формуле

$$E = k \frac{Q}{\varepsilon r^2} \quad (3)$$

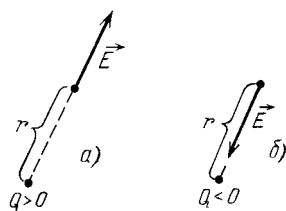


Рис. 41

Вектор $\vec{E}$ направлен от заряда, если $Q > 0$, и к заряду, если $Q < 0$ (рис. 41). Формулу (3) можно, с учетом знака Q , рассматривать как формулу для проекции $\vec{E}$ на радиальное направление (ее обозначают E_r).

Если поле $\vec{E}$ создается несколькими точечными зарядами, то результирующая напряженность есть векторная сумма напряженно-

стей, созданных отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots,$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$ вычисляются по формуле (3) (*принцип суперпозиции полей*).

Если заряд распределен непрерывно по поверхности (объему), то надо мысленно разбить заряженную поверхность (объем) на точечные заряды, а потом применить принцип суперпозиции. Для описания заряда, непрерывно распределенного по поверхности, вводят *поверхностную плотность заряда* $\sigma = \Delta q / \Delta S$. Если заряд распределен неравномерно, то определяют поверхностную плотность в точке, устремляя ΔS к нулю. Единица σ — Кл/м².

► **Силовые линии электрического поля.** Распределение $\vec{E}$ в пространстве можно представить, нарисовав картинку *силовых линий*. Ее рисуют так, чтобы по ней можно было: а) узнать направление вектора $\vec{E}$ (он направлен по касательной к силовой линии в сторону, указанную стрелкой на этой линии); б) сравнить модули $\vec{E}$ в разных точках пространства ($|\vec{E}|$ пропорционален густоте силовых линий, т.е. количеству линий, пронизывающих поперечную площадку, деленному на ее площадь).

Оказывается, можно удовлетворить всем этим требованиям, нарисовав картинку, где силовые линии начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных (или уходят на бесконечность), а в пространстве между зарядами всюду непрерывны (на каждом заряде начинается или заканчивается число линий, пропорциональное его величине).

Возможность изобразить поле с помощью непрерывных силовых линий не является самоочевидной. Как показывает следующий пример, это утверждение оказывается верным только благодаря тому, что в законе Кулона стоит r^2 в знаменателе. Рассмотрим точечный заряд и проведем вокруг него две сферические поверхности радиусами R и $2R$. Площадь внешней сферы в 4 раза больше, чем внутренней, и если провести радиальные силовые линии непрерывно, то их густота на расстоянии $2R$ оказывается в 4 раза меньше, чем на расстоянии R . Так как напряженность поля также уменьшилась в 4 раза, то непрерывно проведенные линии удовлетворяют «правилу густоты». Представьте теперь, что в законе Кулона вместо r^2 стоит r^3 — в этом случае напряженность уменьшилась бы в 8 раз, и чтобы соблюсти «правило густоты» пришлось бы половину линий оборвать в пустом пространстве от R до $2R$.

Рассмотрим три примера на вычисление напряженности поля.

Пример 1. Поле диполя. *Диполем* называют систему двух точечных зарядов q и $(-q)$ (см. рис. 42).

Найдем напряженность поля на расстоянии r от центра диполя O в двух точках — точке A , лежащей на линии зарядов, и в точке B , лежащей на перпендикуляре к этой линии (восстановленном из центра диполя). Напряженность поля в любой точке равна сумме полей двух точечных зарядов: $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$. В точке A напряженность направлена вдоль оси OA и равна

$$E_A = E_q - E_{-q} = k \frac{q}{(r - l/2)^2} - k \frac{q}{(r + l/2)^2} = k \frac{2qrl}{(r^2 - l^2/4)^2},$$

где l — расстояние между зарядами диполя. На большом расстоянии (при $r \gg l$) напряженность в этом направлении убывает по закону $E \approx 2kql/r^3$. В точке B напряженности $\vec{E}_q$ и $\vec{E}_{-q}$ равны по модулю: $E_q = E_{-q} = kq/(r^2 + l^2/4)$, а результирующая напряженность $\vec{E}$ параллельна оси диполя, направлена от $(+q)$ к $(-q)$ и равна

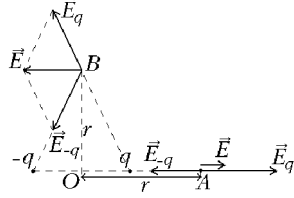


Рис. 42

$$E = E_q \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} = k \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

(мы использовали подобие треугольников — см. рис. 42). При большом удалении от диполя в этом направлении (при $r \gg l$) напряженность также убывает как r^{-3} : $E \approx kql/r^3$.

Пример 2. Поле равномерно заряженной сферы (заряд Q , радиус R).

С л у ч а й $r < R$. Рассмотрим произвольную точку A и докажем, что вклады в $\vec{E}$ от противоположных маленьких площадок, отсекаемых от сферы узким конусом, компенсируются (рис. 43). Заряд площадки пропорционален ее площади, т.е. $q_B/q_C = S_B/S_C$. Из подобия конусов следует, что отношение линейных размеров площадок равно r_{AB}/r_{AC} , значит $S_B/S_C = r_{AB}^2/r_{AC}^2$. Получаем, что $kq_B/r_{AB}^2 = kq_C/r_{AC}^2$, т.е. напряженности компенсируются. Отметим, что если бы не зависимость r^{-2} в законе Кулона, $\vec{E}$ не получилась бы равной нулю.

С л у ч а й $r > R$. Строгий расчет по принципу суперпозиции провести очень сложно. Дадим качественное пояснение с помощью силовых линий. Картина силовых линий двух полей (точечного заряда и равномерно заряженной сферы) при $r > R$ выглядит одинаково — линии равномерно расходятся по радиусам. Кроме того, так как заряды равны, то и число порождаемых ими линий одинаково. Значит, густота линий, т.е. $E(r)$, совпадает для этих полей при любом $r > R$.

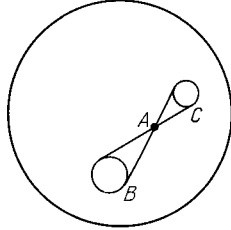


Рис. 43

В ы в о д. Внутри заряженной сферы напряженность равна нулю, вне сферы поле совпадает с полем точечного заряда Q , помещенного в центр сферы:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ k \frac{Q}{r^2} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Замечание. Поле вблизи поверхности сферы равно

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma 4\pi r^2)}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Пример 3. Поле равномерно заряженной плоскости (поверхностная плотность заряда σ).

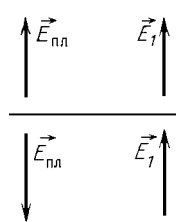


Рис. 44

Из соображений симметрии ясно, что вектор $\vec{E}$ в любой точке перпендикулярен плоскости. Из картины силовых линий видно, что густота линий (а значит и E) не зависит от расстояния до плоскости — поле однородно. Чтобы найти E , рассмотрим поле вблизи поверхности заряженной сферы (на расстоянии $r = R + x$, $x \ll R$). Оно равно σ/ϵ_0 вне сферы и нулю внутри (см. (4)). Это поле можно представить в виде суперпозиции двух полей: поля $\vec{E}_{\text{пл}}$, создаваемого близлежащим плоским участком (его размеры должны быть велики по сравнению с x , но малы по сравнению с R — тогда поле этого участка будет совпадать с полем бесконечной плоскости),

и поля $\vec{E}_1$, создаваемого остальными участками сферы (рис. 44). По разные стороны от поверхности $\vec{E}_1$ — одна и та же (она создан удаленными зарядами), а $\vec{E}_{\text{пл}}$, из

соображений симметрии, имеет противоположные направления. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} E_{\text{пл}} + E_1 = \sigma/\varepsilon_0, \\ E_{\text{пл}} - E_1 = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (5)$$

► **Электростатика проводников.** *Проводником* называют вещество, в котором под действием электрического поля возникает упорядоченное движение заряженных частиц (вещество «проводит» ток). Для этого в веществе должно быть достаточное количество заряженных частиц, способных перемещаться вдоль всего проводника — их называют *свободными зарядами*. В металлах, например, носителями свободных зарядов являются электроны.

В электростатике рассматривается ситуация, когда все заряды находятся в равновесии, т.е. упорядоченное движение отсутствует. Это значит, что результирующая напряженность во всех точках внутри проводника равна нулю. Это условие (назовем его условием равновесия свободных зарядов) выполняется как в случае изолированного проводника, так и для проводника во внешнем поле. Оказывается, в любом случае существует единственное расположение свободных зарядов, удовлетворяющее условию равновесия (это утверждение называют *теоремой единственности*).

Исходя из этой теоремы, можно сразу сказать, что заряд, нанесенный на изолированный проводящий шар, равномерно распределится по его поверхности — в этом случае, как мы знаем, напряженность внутри шара равна нулю. Оказывается, это не случайность: можно доказать, что в состоянии равновесия свободные заряды всегда располагаются только на поверхности проводника. На этих поверхностных зарядах начинаются силовые линии поля, уходящие наружу перпендикулярно к поверхности (в противном случае началось бы движение свободных зарядов вдоль поверхности).

► **Проводник во внешнем поле.** При внесении проводника в поле внешних зарядов свободные заряды проводника перераспределяются. Это явление называют *электростатической индукцией*. После перераспределения внешнее поле внутри проводника оказывается полностью скомпенсировано полем свободных зарядов. (Заряды, распределившиеся по поверхности проводника под действием внешнего поля, называют *наведенными зарядами*.)

Пример 4. Плоскую проводящую пластину, толщина которой значительно меньше ее поперечных размеров, помещают в однородное электростатическое поле с напряженностью $\vec{E}$ перпендикулярно линиям поля. Под действием поля заряды перераспределяются — на одной поверхности пластины появляется наведенный заряд с поверхностной плотностью $(+\sigma)$, на другой — с поверхностной плотностью $(-\sigma)$.

Напряженность поля, создаваемого этими двумя заряженными плоскостями в пространстве между ними (т.е. внутри проводника), равна σ/ε_0 (см. формулу (5)). Чтобы напряженность результирующего поля внутри проводника оказалась равной нулю, поле наведенных зарядов должно скомпенсировать внешнее поле: $\sigma/\varepsilon_0 = E$. Получаем, что поверхностная плотность наведенных зарядов равна $\sigma = \varepsilon_0 E$.

Замечание. Число силовых линий, начинающихся (или заканчивающихся) на заряде, пропорционально его величине. Значит, можно ожидать, что напряженность поля вблизи поверхности проводника, пропорциональная густоте исходящих с поверхности линий, будет связана с поверхностной плотностью заряда на проводнике. Действительно, в двух случаях — для сферы (формула (4)) и плоской пластины (только что рассмотренный пример) мы получили один и тот же ответ:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Такой же ответ оказывается верным и в общем случае.

Пример 5. Метод электростатических изображений. Если поднести точечный заряд $(+q)$ к незаряженному проводнику, то на ближайшей к заряду поверхности проводника возникнут отрицательные наведенные заряды, а на дальней — положительные. В результате между зарядом и проводником возникнет притяжение. Вычислим силу притяжения в том случае, когда расстояние a между зарядом и

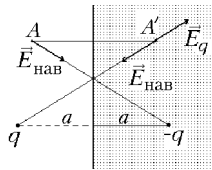


Рис. 45

и поверхностью проводника мало (по сравнению с размерами проводника). Тогда действием положительных зарядов, наведенных на дальней поверхности, можно пренебречь, а поверхность проводника возле заряда считать плоской, т.е. достаточно рассмотреть модельную задачу о заряде в полупространстве, которое заполнено проводником (рис. 45). Найдем поле наведенных зарядов $\vec{E}_{\text{нав}}$ в произвольной (!) точке A вне проводника. Для этого мы сначала рассмотрим точку A' внутри проводника, симметричную точке A относительно плоской поверхности проводника. Поле наведенных зарядов в этой точке найти легко — оно должно компенсировать внешнее поле $\vec{E}_q$, создаваемое зарядом q . Легко сообразить, что поле наведенных зарядов внутри проводника равно полю воображаемого заряда $(-q)$, помещенного в ту же точку, где находится заряд q . Вернемся в точку A . Из соображений симметрии ясно, что поле наведенных зарядов (расположенных на плоской поверхности!) в точке A симметрично (относительно плоскости) полю наведенных зарядов в точке A' . Делаем вывод: поле наведенных зарядов в произвольной точке A вне проводника равно полю воображаемого заряда $(-q)$, расположенного симметрично заряду q относительно плоскости. Этот воображаемый заряд, полностью заменяющий все наведенные на плоскости заряды, называют *изображением* заряда q , а сам метод называют *методом электростатических изображений*. Осталось вычислить силу притяжения заряда и проводника — она равна силе притяжения заряда q к заряду-изображению $(-q)$:

$$F = k \frac{q^2}{(2a)^2}.$$

Замечание. Поскольку нам известно теперь поле во всем пространстве, в том числе вблизи проводящей плоскости, мы можем с помощью формулы (6) вычислить распределение наведенного заряда по плоскости. Попробуйте сделать это самостоятельно.

► **Поляризация диэлектриков.** Диэлектрики не проводят ток. Это означает, что в них нет свободных зарядов. Тем не менее

поле в диэлектрике, как уже отмечалось (формула (3)) , оказывается ослабленным. Значит, при внесении диэлектрика во внешнее поле на нем появляются заряды (их называют *связанными*), поле которых направлено против внешнего и частично его компенсирует. Образование связанных зарядов во внешнем поле называют *поляризацией диэлектрика*.

► **Механизм поляризации.** Если в диэлектрике имеется отличное от нуля среднее поле $\vec{E}$, то каждая молекула становится *электрическим диполем**, ориентированным вдоль $\vec{E}$. (Диполь считают ориентированным вдоль вектора $\vec{l}$, проведенным от отрицательного заряда к положительному.) При не очень сильном поле вектор $\vec{l}$ пропорционален $\vec{E}$. По механизму образования ориентированных диполей можно выделить два типа диэлектриков.

Неполярные диэлектрики. В *неполярных диэлектриках* центры положительного и отрицательного зарядов каждой молекулы в отсутствие поля совпадают (неполярные молекулы H_2 , N_2 , O_2 и др). При внесении такого диэлектрика в поле напряженностью $\vec{E}$ на положительный заряд действует сила вдоль поля, а на отрицательный — против поля, и они начинают расходиться. При этом возникает сила, которая стремится вернуть заряды в прежнее положение, и между ними устанавливается некоторое равновесное расстояние l .

Полярные диэлектрики. В *полярных диэлектриках* центры положительного и отрицательного зарядов каждой молекулы разделены даже в отсутствие поля (полярные молекулы H_2O , HCl и др.). Однако вследствие теплового движения ориентация диполей оказывается хаотической, т.е. поляризация отсутствует (среднее значение вектора $\vec{l}$ равно нулю). При внесении в электрическое поле на каждую молекулу будет действовать вращательный момент электрических сил, стремящийся повернуть ее по полю. В результате вдоль поля будет ориентировано больше диполей, чем против поля. Среднее значение вектора $\vec{l}$ становится не равным нулю; для простоты можно считать, что на месте каждой молекулы появляется диполь с $\vec{l} = \vec{l}_{cp}$, направленным вдоль $\vec{E}$ ($\vec{l}_{cp} \sim \vec{E}$).

В простейшем случае, когда поле однородно, легко понять результат образования диполей: происходит как бы сдвиг всех положительных зарядов диэлектрика на расстояние l относительно отрицательных. Ясно, что объем диэлектрика останется электро нейтральным, а на поверхности возникнут тонкие слои положительных и отрицательных зарядов толщиной l . Оказывается, этот

* Диполем в общем случае называют электронейтральную систему зарядов, в которой центр положительных зарядов не совпадает с центром отрицательных зарядов.

результат носит общий характер: при поляризации незаряженного диэлектрика возникают только поверхностные связанные заряды. В тонкой диэлектрической пластинке, перпендикулярной к внешнему полю $\vec{E}_0$, поле ослабляется в ε раз:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Это утверждение оказывается верным для любого однородного диэлектрика, граница которого перпендикулярна силовым линиям поля, существовавшего до внесения диэлектрика (например, для шарового слоя диэлектрика вокруг точечного заряда).

Пример 6. При помещении плоской диэлектрической пластины с проницаемостью ε в однородное поле перпендикулярно напряженности $\vec{E}_0$ на одной ее поверхности возникнут связанные заряды с плотностью $+\sigma_{\text{св}}$, а на другой — с плотностью $(-\sigma_{\text{св}})$. Поле этих двух заряженных слоёв равно σ/ε_0 (см. формулу (5)), т.е. поле внутри пластины равно $E = E_0 - \sigma/\varepsilon_0$. С другой стороны, оно должно быть равно $E = E_0/\varepsilon$. Приравняв эти выражения, найдем поверхностную плотность связанных зарядов:

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0.$$

► **Потенциал электростатического поля.** Важное свойство электростатического поля заключается в том, что *работа поля по перенесению пробного заряда* не зависит от траектории (или, что то же самое, работа поля вдоль замкнутой траектории равна нулю). Поля, обладающие таким свойством, называют *потенциальными*. (Потенциальное поле — это поле консервативных сил, которые рассматривались в механике, см. глава 1, §3.)

Докажем потенциальность поля, создаваемого одним точечным зарядом (произвольное электростатическое поле есть суперпозиция таких полей). Разобьем траекторию перемещения пробного заряда q на маленькие отрезки. Работа поля по переносу этого заряда равна

$$A = \sum_i F_i |\Delta \vec{r}_i| \cos \alpha_i = \sum_i q E_i(r) \Delta r_i,$$

где α_i — угол между направлением движения и радиальным направлением, а $\Delta r_i = |\Delta \vec{r}_i| \cos \alpha_i$ — изменение расстояния до источника поля. Правая часть равенства в точности совпадает с работой поля при перемещении пробного заряда q по прямой в радиальном направлении и не зависит от траектории, а зависит только от начального и конечного расстояния до источника поля. (Отметим, что приведенное рассуждение годится для доказательства потенциальности любого центрального поля.)

Опираясь на свойство потенциальности, можно определить *потенциальную энергию W_q пробного заряда q во внешнем электростатическом поле*. Делается это так же, как в механике. (В главе 3 для обозначения энергии используется буква W .)

1. Определяем разность потенциальных энергий в различных

точках

$$W_q(\vec{r}_1) - W_q(\vec{r}_2) = A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (7)$$

где $A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ — работа поля по переносу заряда q из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$. Она равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

2. Выбираем положение пробного заряда (точка $\vec{r}_0$), в котором его потенциальная энергия равна нулю (выбор точки отсчета потенциальной энергии). Получаем выражение для потенциальной энергии пробного заряда в произвольной точке пространства

$$W_q(\vec{r}) = A_q(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (8)$$

(обычно точку $\vec{r}_0$ выбирают на бесконечности).

Так как сила $\vec{F}_q$, действующая на пробный заряд со стороны поля, пропорциональна q : $\vec{F}_q = q\vec{E}$, то и работа по любой траектории пропорциональна q . Из формулы (8) следует, что W_q/q не зависит от величины пробного заряда q , т.е. является характеристикой поля в данной точке. Эту величину называют *потенциалом* поля и обозначают буквой φ :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_q(\vec{r})}{q} = \frac{A_q(\vec{r}, \vec{r}_0)}{q} \quad (9)$$

Подставляя $W_q = q\varphi$ в формулу (7), получаем выражение для работы поля над зарядом q :

$$A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10)$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2$ называют *разностью потенциалов* между точками поля (в отличие от изменения потенциала $\varphi_2 - \varphi_1$) и обозначают буквой U_{12} (или просто U). Потенциал и разность потенциалов в СИ выражают в *вольтах* ($1 \text{ В} = \text{Дж/Кл}$).

► **Эквипотенциальные поверхности.** Геометрическое место точек, обладающих одинаковым потенциалом φ , называют эквипотенциальной поверхностью. В каждой точке эта поверхность перпендикулярна вектору напряженности. (Работа поля равна нулю при любом смещении пробного заряда q вдоль поверхности (см. (10)). Значит, сила $q\vec{E}$ должна быть перпендикулярна к поверхности.)

Замечание. В электростатике поверхность проводника всегда представляет собой эквипотенциальную поверхность.

► **Разность потенциалов в однородном поле.** Рассмотрим две точки A и B ($AB = l$) в поле $\vec{E}$. Если угол между векторами

$\overrightarrow{AB}$ и $\vec{E}$ равен α (рис. 45), то

$$\varphi_A - \varphi_B = El \cos \alpha, \quad \text{или} \quad |U| = Ed, \quad (11)$$

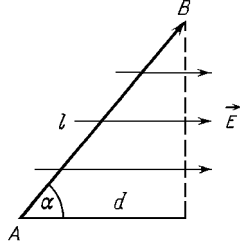


Рис. 46

где d — расстояние между эквипотенциальными поверхностями (плоскостями), содержащими точки A и B . Действительно, работа поля равна $F_q l \cos \alpha = (qE)l \cos \alpha$, а по формуле (10) она же равна $q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Сокращая q , получим формулу (11). (Из формулы (11) видно, что напряженность можно выражать в В/м.)

► **Потенциал поля точечного заряда.** Применим формулу (11) к точкам A и B , лежащим на одном радиусе на расстояниях r и $r + \Delta r$ от заряда Q (при малом Δr поле можно считать однородным):

$$\varphi(r) - \varphi(r + \Delta r) = E_r \Delta r.$$

(Положительным направлением считается направление от заряда.) Устремляя Δr к нулю, имеем

$$\varphi'(r) = -E_r.$$

Значит, потенциал φ может быть найден как первообразная от E_r , взятая с обратным знаком. Так как $E_r = kQ/\varepsilon r^2$ (см. (3)), то для φ получаем выражение

$$\varphi = k \frac{Q}{\varepsilon r} + C.$$

Константа C зависит от выбора точки нулевого потенциала. Самый простой вид φ ($C = 0$) соответствует выбору нулевого потенциала на бесконечности:

$$\varphi = k \frac{Q}{\varepsilon r}. \quad (12)$$

► **Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов.** Энергию взаимодействия двух зарядов q_1 и q_2 можно вычислить, считая, что заряд q_1 находится в поле заряда q_2 (или наоборот):

$$W_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}. \quad (13)$$

Ответ, естественно, выглядит симметрично.

► **Принцип суперпозиции для потенциала.** Потенциал результирующего поля равен сумме потенциалов, создаваемых в дан-

ной точке отдельными зарядами

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Пример 7. Рассмотрим тонкое кольцо радиусом R , равномерно заряженное зарядом Q . Найдём напряженность и потенциал в точке A , расположенной на оси кольца на расстоянии x от его центра (рис. 47). Разобьём кольцо на малые участки, содержащие заряды ΔQ_i . Поле, создаваемое таким участком в точке A , вычислим по формуле для точечного заряда:

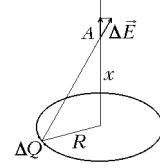


Рис. 47

$$\Delta E_i = k \frac{\Delta Q_i}{x^2 + R^2}, \quad \Delta \varphi_i = k \frac{\Delta Q_i}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Чтобы найти векторную сумму всех $\Delta \vec{E}_i$, заметим, что из соображений симметрии $\vec{E}$ должна быть направлена вдоль оси кольца. Значит, надо просуммировать только проекции $\Delta \vec{E}_i$ на эту ось:

$$E = \sum_i \Delta E_i \cos \alpha = \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

откуда, просуммировав заряды, получим:

$$E = k \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

С потенциалом все проще — надо просто сложить все $\Delta \varphi_i$:

$$\varphi = \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{\sqrt{x^2 + R^2}} = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Зная φ , можно найти работу поля по перемещению заряда q из точки A на бесконечность (или в любую другую точку на оси):

$$A = q(\varphi - 0) = k \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Если, например, поместить в точку A тело массой m с зарядом q (того же знака, что и Q) и отпустить, то его скорость на большом расстоянии от кольца можно найти из теоремы о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = k \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

(кольцо считаем неподвижным).

► Связь между напряженностью и потенциалом.

1. Пусть известна напряженность поля во всем пространстве. Разность потенциалов между произвольными точками A и B можно вычислить, разбив соединяющую их линию на малые участки длиной Δl_i ($i = 1, 2, \dots$) и применяя на каждом участке формулу (11):

$$\varphi_A - \varphi_B = E_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 + E_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \dots$$

2. Если, наоборот, известны потенциалы всех точек поля, то, построив систему эквипотенциальных поверхностей, найдем направление $\vec{E}$ в любой точке: вектор $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям и направлен в сторону уменьшения потенциала. Чтобы найти E , надо применить формулу (11) к двум близким точкам на одной силовой линии: $E = |\Delta\varphi/\Delta x|$. Видно, что как напряженность, так и потенциал содержат, каждый по отдельности, полную информацию об электростатическом поле.

Замечание. Можно вычислить проекцию E_x на произвольную ось X , если известен потенциал на этой оси $\varphi(x)$. Для этого надо применить формулу (10) к двум близким точкам на этой оси:

$$qE_x \Delta x = q(\varphi(x) - \varphi(x + \Delta x)),$$

т.е.

$$E_x = -\varphi'(x)$$

Например, в предыдущем примере можно найти напряженность поля на оси кольца не методом суперпозиции, а взяв производную (с обратным знаком) от потенциала. Проверьте это.

► **Потенциал проводника.** Так как напряженность поля внутри проводника равна нулю, то все его точки имеют одинаковый потенциал, и можно говорить о потенциале проводника. Например, *потенциал уединенной проводящей сферы* радиусом R равен

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q}{R}, \quad (14)$$

где Q — заряд сферы, а ϵ — диэлектрическая проницаемость среды вокруг проводника.

Пример 8. Найдем, как изменится потенциал проводящей сферы, если на расстоянии $l > R$ от ее центра поместить точечный заряд q . В присутствии точечного заряда распределение зарядов по поверхности сферы не будет равномерным. Однако потенциал сферы можно вычислить и не зная распределения зарядов на проводнике. Для этого рассмотрим центр O сферы. Потенциал этой точки легко вычислить благодаря тому, что все заряды на поверхности сферы расположены от нее на одинаковом расстоянии R :

$$\varphi = k \frac{q}{l} + \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{R} = k \frac{q}{l} + k \frac{Q}{R}.$$

Но потенциал центра сферы равен потенциалу всех остальных точек внутри сферы, т.е. равен потенциалу самой сферы. Отметим, что так же можно вычислить и потенциал уединенной сферы, т.е. получить формулу (14).

При соединении двух проводников проводящей проволокой они образуют единый проводник, т.е. их потенциалы выравниваются. Это происходит за счет перетекания части заряда с одного проводника на другой (полный заряд двух проводников при этом не меняется). При *заземлении проводника* он приобретает потенциал,

равный потенциалу Земли (обычно потенциал Земли принимают равным нулю).

Пример 9. Посмотрим, как распределится заряд между двумя удаленными друг от друга проводящими сферами радиусов R_1 и R_2 , если их соединить тонкой проволокой. Из условия равенства потенциалов

$$k \frac{Q_1}{R_1} = k \frac{Q_2}{R_2}$$

получим, что отношение зарядов на сферах равно отношению радиусов. Но хотя на большей сфере содержится больший заряд, поверхностная плотность заряда на ней будет меньше:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1/4\pi R_1^2}{Q_2/4\pi R_2^2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Рассматривая две соединенных сферы как модель проводника с переменной кривизной поверхности, можно сделать вывод, что участки проводника с маленьким радиусом закругления (острия) должны обладать большой поверхностной плотностью заряда. Так как густота силовых линий, покидающих поверхность проводника, пропорциональна поверхностной плотности заряда, то напряженность поля возле острия будет гораздо больше, чем около других участков поверхности. (Формулу, связывающую поверхностную плотность заряда с напряженностью, мы обсуждали в Примере 4.) Большая напряженность может приводить к ионизации воздуха возле острия и возникновению свечения (огни Святого Эльма).

► **Конденсаторы.** *Конденсатором* называют систему двух изолированных друг от друга проводников (обкладки конденсатора), полный заряд которых равен нулю. Если один проводник содержит положительный заряд $(+q)$, а другой — отрицательный заряд $(-q)$, то между ними возникает разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Заряд q называют зарядом конденсатора, модуль разности потенциалов U — *напряжением на конденсаторе*. Можно доказать, что U пропорционально q :

$$U = \frac{1}{C}q,$$

где C — *электрическая емкость* (или просто *емкость*). Она выражается в *фарадах* ($\Phi = \text{Кл/В}$). Емкость конденсатора не зависит от q и U .

► **Плоский конденсатор.** Рассмотрим пример *плоского конденсатора*, образуемого двумя пластинами площадью S , расстояние между которыми d много меньше их размеров. Поле между ними можно почти всюду считать однородным ($E = U/d = \text{const}$), т.е. пластины заряжены равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = q/S$. Каждая пластина создает поле $E_{\text{пл}} = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon$ (формула (5)), т.е. результирующее поле между пластинами равно

$$E = 2E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}, \quad (15)$$

а вне конденсатора напряженность поля пренебрежимо мала. Учитывая, что $U = Ed$, выражаем U через q и находим емкость C :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (16)$$

Вопрос. Как изменятся характеристики заряженного плоского конденсатора (заряд, напряжение, напряженность, емкость), если расстояние между его обкладками увеличить в два раза?

Ответ. Емкость конденсатора уменьшится в два раза. Изменение остальных характеристик зависит от того, какой конденсатор рассматривается — изолированный или подключенный к источнику. В первом случае заряд на обкладках не изменяется, напряженность тоже (см. (15)), а напряжение в два раза увеличивается. Во втором случае источник поддерживает постоянное напряжение, значит, и напряженность, и заряд уменьшатся в два раза.

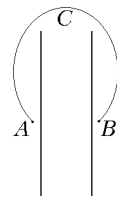


Рис. 48

Вопрос. Какую работу надо совершить, чтобы перенести пробный заряд q из точки A в точку B по траектории $A - C - B$, лежащей вне конденсатора (рис. 48)?

Ответ. На первый взгляд может показаться, что поскольку вне конденсатора поля нет, то работа должна быть равна нулю. Однако это не так. Поскольку работа поля не зависит от траектории, то вместо указанной траектории можно пройти из A в B по прямой линии через конденсатор, и работа от этого не изменится. Значит, работа поля равна $-qU$, где U — напряжение на конденсаторе, а нам придется совершить работу qU . На длинной траектории слабое наружное поле совершает точно такую же работу, как на коротком пути — сильное внутреннее поле.

► **Соединение конденсаторов.** Из двух (или нескольких) конденсаторов можно сделать один, соединяя их обкладки проводочками. Два конденсатора можно соединить двумя способами.

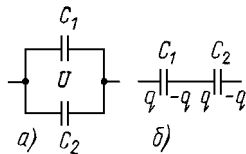


Рис. 49

1. Параллельное соединение.

Обкладки конденсаторов соединяют попарно (рис. 49 а), т.е. в системе остается только два изолированных проводника, которые и представляют собой обкладки нового конденсатора. Напряжение между этими обкладками U равно напряжению на каждом из конденсаторов C_1 и C_2 : $U_1 = U_2 = U$. Заряд нового конденсатора q равен сумме зарядов $q_1 = C_1 U$ и $q_2 = C_2 U$. По определению $q = C_{\text{общ}} U$, и для $C_{\text{общ}}$ получаем

$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2.$$

2. Последовательное соединение. В этом случае производят только одно соединение (рис. 49 б), а две оставшиеся обкладки — одна от конденсатора C_1 , другая от конденсатора C_2 — играют роль обкладок нового конденсатора. При подключении этих внешних обкладок к источнику с напряжением U полный заряд на соединенных обкладках остается равным нулю (закон сохранения заряда); значит заряды всех конденсаторов равны: $q_1 = q_2 = q$. Напряжение на новом конденсаторе U равно сумме $U_1 = q/C_1$ и $U_2 = q/C_2$.

Учитывая, что $U = q/C_{\text{общ}}$, получаем

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Пример 10. При решении задач часто возникает необходимость, зная напряжение U на системе последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 , найти напряжение на каждом конденсаторе (или наоборот). Для этого надо учесть, что заряд на системе равен заряду каждого из конденсаторов:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_{\text{общ}}U}{C_1} = \frac{C_2U}{C_1 + C_2}.$$

Но можно поступить еще проще. Чтобы найти U_1 , надо приравнять заряды первого и второго конденсаторов: $C_1U_1 = C_2(U - U_1)$ и решить полученное уравнение.

Пример 11. Эквивалентные схемы. Если пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком не полностью, а частично, то для вычисления емкости нельзя применять формулу (16). Однако часто удается заменить такой конденсатор эквивалентной схемой, содержащей только элементарные конденсаторы (т.е. пустые или полностью заполненные диэлектриком). Например, конденсатор на рис. 50 а можно заменить двумя параллельно соединенными конденсаторами с емкостями $C_1 = \varepsilon_0 S_1/d$ и $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S_2/d$, а конденсатор на рис. 50 б — двумя последовательно соединенными конденсаторами с емкостями $C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$.

Вопрос. Изменится ли емкость конденсатора на рис. 50 б, если диэлектрическую пластину толщиной d_2 расположить не вплотную к обкладке?

Ответ. Нет, не изменится. Это можно проверить непосредственным расчетом, но можно понять и без вычислений. Отодвинув пластину, мы получим эквивалентную схему с тремя конденсаторами: пустой-полный-пустой. Ответ для емкости не изменится, если на эквивалентной схеме поменять местами второй и третий конденсаторы. Но такая замена эквивалентна перемещению диэлектрика обратно к обкладке.

Замечание. При выборе эквивалентной схемы нельзя ориентироваться только по внешнему виду системы, надо проверять «физические признаки» параллельного и последовательного соединений. Например, на рис. 51 изображена система, внешне похожая на рис. 50 б, но с замкнутыми внешними обкладками. Однако эквивалентная схема содержит не последовательно, а параллельно соединенные конденсаторы $C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$. Это становится понятным, если заметить, что в системе присутствуют всего два изолированных друг от друга проводника (которые и будут новыми обкладками), т.е. напряжения на правом и левом промежутках равны — а это и есть «признак» параллельного соединения! Когда это понято, легко добиться и внешнего сходства с параллельным соединением — надо мысленно разрезать внутреннюю пластину, а затем развернуть получившиеся конденсаторы на 90° .

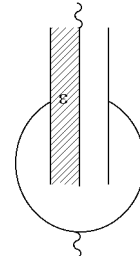


Рис. 51

► **Энергия системы зарядов.** Энергия системы зарядов, по определению, равна работе внешних сил по созданию этой системы или, что то же самое, работе сил электростатического взаимодействия при ее уничтожении (т.е. при разнесении зарядов на бесконечность). Эта энергия равна сумме энергий взаимодействия

между всеми парами зарядов (см. формулу (13)):

$$W = W_{1,2} + W_{1,3} + \dots + W_{2,3} + \dots = \sum_{i < j} W_{i,j}.$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{i,j} = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал поля всех остальных зарядов в точке, где находится заряд q_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

В самом деле, $q_i \varphi_i$ равно работе электростатических сил при удалении заряда q_i в поле всех остальных зарядов. Значит, сумма всех $q_i \varphi_i$ учитывает работу сил взаимодействия между зарядами q_i и q_j два раза (при удалении q_i и при удалении q_j), и ее надо умножить на $1/2$.

► **Энергия проводника.** Так как все точки проводника имеют один и тот же потенциал φ , то энергия проводника равна

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi + q_2 \varphi + \dots) = \frac{q \varphi}{2},$$

где φ — потенциал проводника, q — заряд проводника. Например, энергия заряженной сферы (см. (14)) равна $W = q^2 / (8\pi \varepsilon_0 \varepsilon R)$.

► **Энергия конденсатора.** Положительно заряженная пластина (сумма всех зарядов на ней равна q) имеет потенциал φ_1 , а отрицательно заряженная пластина — потенциал φ_2 . Поэтому

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Для плоского воздушного конденсатора эта же формула может быть получена подсчетом работы, которую надо совершить при раздвижении пластин конденсатора до расстояния d . Сила притяжения, действующая на каждую пластину, равна

$$F = qE_{\text{пл}} = \frac{qE}{2},$$

где $E_{\text{пл}}$ — поле, созданное другой пластиной. Так как $E = q/(\varepsilon_0 S)$ (см. (15)), то сила F не зависит от расстояния между пластинами. Получаем

$$W = Fd = \frac{qEd}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Пример 12. При переключениях в конденсаторных схемах происходит перезарядка, что приводит к изменению энергии системы конденсаторов. При перезарядке в соединяющих проводах протекает ток, провода нагреваются, т.е. часть электрической

энергии переходит во внутреннюю. Например, при соединении обкладок конденсатора емкостью C_1 , заряженного до напряжения U_1 , с обкладками незаряженного конденсатора емкостью C_2 после перезарядки устанавливается общее напряжение U' , которое можно найти из закона сохранения заряда:

$$C_1 U_1 = (C_1 + C_2) U'.$$

Уменьшение электрической энергии при перезарядке равно

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U'^2}{2} = \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Именно на столько увеличится внутренняя (тепловая) энергия соединительных проводов (для краткости говорят: выделится в виде тепла).

Замечание. Если в схеме присутствуют источники тока, то при записи закона сохранения энергии надо учитывать работу, совершенную ими при перезарядке.

► **Плотность энергии поля.** При последовательном полевом подходе следует считать, что энергия заключена не во взаимодействующих зарядах, а в электрическом поле, заполняющем пространство между ними. Это подтверждается тем, что плотность энергии поля, равная отношению энергии конденсатора W к его объему $V = Sd$:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{V} \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{Sd} \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \right) \frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2},$$

зависит только от напряженности поля E и диэлектрической проницаемости ε среды, которые могут быть определены в каждой точке пространства (являются *локальными характеристиками*).

Пример 13. Вычислим работу, которую надо совершить для медленного извлечения из изолированного конденсатора тонкой диэлектрической пластины толщиной $d_1 < d$ (d — расстояние между обкладками). Пластина расположена параллельно обкладкам, ее площадь S равна площади обкладок. Работа равна изменению электростатической энергии: $A = W_2 - W_1$. Можно рассчитать начальную и конечную энергии конденсатора, рассмотрев эквивалентную схему, вычислив емкость в начальном и конечном состоянии и используя формулу $W = q^2/2C$ (заряд на обкладках сохраняется). Прodelайте такой расчет сами, а мы покажем, как решить эту задачу через плотность энергии поля. Напряженность поля в пустом от диэлектрика пространстве не изменится, а в том месте, где был диэлектрик, напряженность изменится от E/ε до E , где $E = \sigma/\varepsilon_0$. Значит, изменение энергии в объеме диэлектрика $V = Sd_1$ равно

$$\Delta W = V \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (E/\varepsilon)^2}{2} \right) = d_1 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Хочется обратить внимание на особенность электростатических расчетов, проявившуюся в этом примере. При вычислении энергии мы пренебрегали краевыми эффектами и считали поле однородным. В то же время возникновение силы, втягивающей частично извлеченную пластину обратно в конденсатор (против этой силы мы совершаем работу), объясняется именно краевыми эффектами! Дело в том, что благодаря потенциальности поля наличие краевых эффектов учитывается автоматически. (Сравните с обсуждением вопроса, поставленного на странице 84).

§ 2. Законы постоянного тока

► **Электрический ток. Сила тока.** Электрическим током называют упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц (носителей тока). За направление тока принимают направление движения положительных зарядов; ток, созданный отрицательными зарядами, направлен против их упорядоченного движения. Количественной мерой тока служит *сила тока*, которую определяют как отношение заряда Δq , прошедшего через поперечное сечение проводника за некоторый интервал времени Δt , к величине этого интервала:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Конечному Δt соответствует *средняя сила тока* за время Δt . Чтобы найти мгновенную силу $I(t)$, надо Δt устремить к нулю: $I = q'(t)$.

Если сила тока не зависит от времени, то такой ток называют *постоянным*. Сила тока одинакова на всех участках неразветвленной цепи (иначе происходило бы накопление заряда). Силу тока выражают в *амперах* (А). Ампер — основная единица СИ, определяемая через магнитное взаимодействие токов.

► **Плотность тока.** Силу тока можно выразить через среднюю скорость упорядоченного движения зарядов $\vec{v}_{\text{ср}}$:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q_0 n v_{\text{ср}} S,$$

где q_0 — заряд носителей тока, n — их концентрация. (Заряд Δq , прошедший через сечение S за время Δt , равен количеству частиц в объеме $\Delta V = v_{\text{ср}} \Delta t \cdot S$, умноженному на q_0 .) Величину

$$j = \frac{I}{S} = q_0 n v_{\text{ср}} \quad (17)$$

называют *плотностью тока* (выражают в А/м²). В отличие от силы тока I , относящейся к проводу в целом, j является *локальной* характеристикой: её можно определить в каждой точке проводника (для этого надо S устремить к нулю). Кроме того, плотность тока (в отличие от силы тока) является вектором: $\vec{j} = q_0 n \vec{v}_{\text{ср}}$.

В веществе носителями тока являются свободные заряды. Оценим $v_{\text{ср}}$ для свободных электронов в меди при плотности тока 10^6 А/м². Концентрация свободных электронов примерно равна концентрации атомов $n = N_A \rho / M \approx 8,5 \cdot 10^{28}$ 1/м³, а $q_0 = e$; подставляя в (17), получаем $v_{\text{ср}} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м/с. Для сравнения приведем среднюю скорость хаотического теплового движения электронов

при комнатной температуре: $v_{\text{хаот}} = \sqrt{3kT/m_e} \sim 10^5 \text{ м/с}$ (см. главу 2, формулу (4)).

► **Закон Ома. Сопротивление проводников.** В проводнике направленному движению свободных зарядов оказывает сопротивление кристаллическая решетка. Для поддержания тока на заряды должна постоянно действовать сила $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ в направлении тока. Как только эта сила исчезает, ток быстро обращается в ноль за счет столкновений зарядов с решеткой. Закон Ома в *локальной форме* утверждает, что плотность тока в данной точке проводника пропорциональна напряженности:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (18)$$

где σ — удельная проводимость, а ρ — *удельное сопротивление* материала проводника.

На *однородном участке цепи* (не содержащем источников тока) поле $\vec{E}$ — электростатического происхождения ($\vec{E} = \vec{E}^{\text{эл}}$). Оно создается поверхностными зарядами, которые образуются на всех участках цепи сразу после ее замыкания. В проводе постоянного сечения $\vec{j}$, а следовательно и $\vec{E}$, всюду направлены вдоль провода и постоянны по величине.

Однородный участок цепи описывают не локальными величинами $\vec{j}$ и $\vec{E}^{\text{эл}}$, а током I и разностью потенциалов U на его концах. Из (18) следует, что I пропорционален U (*закон Ома*):

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad I = \frac{1}{R}U. \quad (19)$$

Величину R называют *сопротивлением проводника* и выражают в *омах* ($\text{Ом} = \text{В/А}$). Сопротивление зависит как от материала проводника, так и от его формы. Например, для провода длиной l и *постоянного сечения* S , подставляя в (18) $j = I/S$ и $E = U/l$, получаем из (19)

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (20)$$

Из этой формулы видно, что ρ выражается в $\text{Ом} \cdot \text{м}$. Например, для меди $\rho \approx 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, для никеля $\rho \approx 10,0 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (при 20°C).

Пример 14. При растяжении проволоки на 1% ее начальной длины площадь ее поперечного сечения уменьшается в 1,01 раз. Из формулы (20) следует, что ее сопротивление увеличится примерно на 2%.

► **Обобщенный закон Ома.** Если участок цепи не является однородным (т.е. на свободные заряды действует не только электростатическое поле), то закон Ома (19) не выполняется. Однако его

легко обобщить на случай *неоднородного участка цепи*, если (19) записать в виде

$$I = \frac{1}{R} \frac{A_q^{\text{эл}}}{q}$$

где $A_q^{\text{эл}}$ — работа электростатического поля по переносу пробного заряда q вдоль участка цепи (см. (10)). В общем случае работу электростатического поля $A_q^{\text{эл}}$ надо заменить на работу A_q всех сил, действующих на заряды:

$$I = \frac{1}{R} \frac{A_q}{q} \quad (21)$$

(*обобщенный закон Ома*). Работу всех сил по переносу единичного заряда вдоль участка цепи иногда называют *напряжением* на данном участке (для однородного участка напряжение равно разности потенциалов). Обобщенный закон Ома тем самым утверждает, что сила тока на *любом* участке цепи пропорциональна напряжению на этом участке.

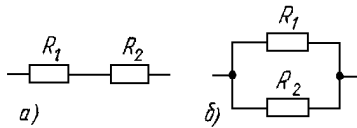
► **Зависимость сопротивления от температуры.** Удельное сопротивление ρ и сопротивление проводника R зависят от температуры по закону

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 , R_0 — значения при 0°C , α — *температурный коэффициент сопротивления* (выражается в $1/\text{K}$). Для металлов α положителен (у чистых металлов $\alpha \approx \frac{1}{273} \text{K}^{-1}$, т.е. ρ пропорционально T); для полупроводников и растворов электролитов $\alpha < 0$. Видно, что зависимость от температуры весьма существенна: при нагревании металлического сопротивления до $\approx 300^\circ\text{C}$ его сопротивление удваивается.

► **Соединение проводников.** Два проводника можно соединить *последовательно* (рис. 52 а) или *параллельно* (рис. 52 б).

В первом случае $I_1 = I_2 = I$, $U_1 + U_2 = U$, причем $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$, $U = IR_{\text{общ}}$. Получаем



$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2.$$

Рис. 52

Во втором случае $U_1 = U_2 = U$, $I = I_1 + I_2$, причем $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$, $I = U/R_{\text{общ}}$. Получаем

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Замечание. Эти формулы легко обобщаются на случай произвольного числа сопротивлений. Например, сопротивление N последовательно соединенных сопротивлений величиной R каждое равно NR , если же их соединить параллельно, то получим сопротивление R/N .

Вопрос. На сколько одинаковых частей надо разрезать проволоку, чтобы после их параллельного соединения (например, скручивания вместе) сопротивление оказалось в 25 раз меньше, чем до разрезания?

Ответ. На 5 частей.

Вопрос. Как надо подсоединять амперметр или вольтметр — параллельно или последовательно участку цепи? Какими — маленькими или большими — должны быть их сопротивления?

Ответ. Амперметр надо включать последовательно, тогда ток через него (который он и фиксирует) будет равен току через исследуемый участок. Чтобы подключение амперметра как можно меньше исказило измеряемый ток, его сопротивление должно быть маленьким. Вольтметр надо подключать параллельно, а его сопротивление должно быть большим.

► **Изменение шкалы измерительного прибора.** Для изменения пределов измерения амперметра или вольтметра используют параллельное или последовательное подсоединение дополнительных сопротивлений. Максимальное отклонение стрелки прибора соответствует протеканию через него *номинального тока* силой I_0 и напряжению на приборе U_0 ($U_0 = r_{\text{пр}} I_0$).

Для расширения пределов измерения амперметра применяют *шунтирование*, т.е. параллельное соединение с прибором маленького сопротивления $r_{\text{ш}}$ (рис. 53 а). Тогда при отклонении стрелки в крайнее положение через сам прибор протекает ток I_0 , но через прибор с шунтом протекает измеряемый ток I_{max} , который гораздо больше I_0 . Этот ток можно вычислить, приравняв напряжения на приборе и на шунте: $U_0 = r_{\text{ш}}(I_{\text{max}} - I_0)$, откуда находим $I_{\text{max}} = I_0 + U_0/r_{\text{ш}} = I_0(1 + r_{\text{пр}}/r_{\text{ш}})$.

Для расширения пределов измерения вольтметра последовательно с прибором включают большое сопротивление $R_{\text{д}}$ (рис. 53 б). При максимальном отклонении стрелки ток через прибор и через $R_{\text{д}}$ равен I_0 , а измеряемое напряжение равно $U_{\text{max}} = U_0 + I_0 R_{\text{д}} = U_0(1 + R_{\text{д}}/r_{\text{пр}})$.

► **Тепловое действие тока.** Направленное движение зарядов возникает под действием поля $\vec{E}$ (формула (18)). За счет «трения» этих зарядов о кристаллическую решетку (т.е. многочисленных соударений с ионами) энергия, полученная электронами от этого поля, переходит во внутреннюю (тепловую) энергию проводника. (Проводник нагревается и отдает эту энергию в виде теплоты окружающему воздуху. В установившемся режиме температура проводни-

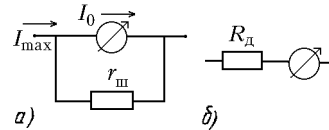


Рис. 53

ка не меняется, и вся полученная от электронов энергия теряется в виде теплоты.) За время Δt через каждое сечение проводника проходит заряд $q = I\Delta t$; полная работа поля над зарядами участка цепи равна работе A_q по переносу заряда q с одного конца участка на другой. В случае однородного участка цепи эта работа равна $A_q^{\text{эл}} = qU = IU\Delta t$, и для тепловой мощности тока получаем

$$P_{\text{тепл}} = IU = U^2/R = I^2R.$$

Для бытовых тепловых приборов U — напряжение сети, на которое рассчитан прибор (*номинальное напряжение*), P — мощность, выделяющаяся при номинальном напряжении (*номинальная мощность*); по этим данным можно найти сопротивление прибора: $R = U^2/P$. При включении прибора в сеть с напряжением, не равным его номинальному, мощность также изменится. При решении задач обычно предполагается, что сопротивление прибора не меняется (в действительности это, конечно, не так, поскольку при изменении режима работы изменится температура проводника, а значит и его сопротивление). Бытовые приборы включают в сеть параллельно друг другу, тогда напряжение на каждом из них равно напряжению сети.

Пример 15. Если две лампочки, рассчитанные на одно и то же напряжение U , подключить «неправильно», т.е. последовательно друг к другу, то напряжение на каждой из них будет меньше номинального, и они будут потреблять меньшую мощность. Пусть, например, их номинальные мощности равны $P_1 = 40$ Вт и $P_2 = 60$ Вт. Их сопротивления равны $R_1 = U^2/P_1$ и $R_2 = U^2/P_2$. Видно, что сопротивление второй лампы меньше, следовательно, при последовательном соединении на ней будет выделяться меньшая мощность, чем на первой. Общий ток при таком соединении равен $I = U/(R_1 + R_2)$, а полная мощность $I^2(R_1 + R_2) = P_1P_2/(P_1 + P_2) = 24$ Вт оказывается меньше, чем номинальная мощность каждой из ламп.

Вопрос. Как изменилась мощность плитки, если при ремонте удалили пятую часть спирали?

Ответ. Плитку включают в ту же сеть, значит мощность стала равна $P' = U^2/0,8R = 1,25U^2/R = 1,25P$, т.е. мощность возросла на 25%. (При этом в действительности изменилась рабочая температура спирали, т.е. ее сопротивление будет больше, чем $0,8R$, но при решении задач, как мы отмечали, это молчаливо разрешено не учитывать.)

Вопрос. Почему при включении нагревательного прибора большой мощности лампочки начинают светить слабее?

Ответ. Если бы приборы в квартире были подключены непосредственно к сети, то они бы друг на друга не влияли. На самом деле группа параллельно включенных бытовых приборов соединяется с сетью подводящими проводами, которые включены с этой группой последовательно. При подключении нового прибора большой мощности (т.е. имеющего малое сопротивление), общее сопротивление группы приборов уменьшается, общий ток возрастает, что приводит к увеличению напряжения на проводах и, соответственно, уменьшению напряжения на всех приборах. Однако через некоторое время новый прибор сильно нагреется, его сопротивление возрастёт, и напряжение на приборах опять поднимется, хотя и не до прежнего уровня (видно, что лампочки начинают опять гореть ярче).

► **Закон Джоуля — Ленца.** В общем случае произвольного,

не обязательно однородного, участка цепи для тепловой мощности применима только формула

$$P_{\text{тепл}} = I^2 R \quad (22)$$

(закон Джоуля — Ленца). Действительно, в тепло переходит полная работа всех сил, действующих на свободные заряды; эту работу за время Δt можно найти из (21): $A_q = q(IR) = I^2 R \Delta t$ (так как $q = I \Delta t$), откуда получаем (22).

► **Сторонние силы. ЭДС.** Для поддержания постоянного тока в замкнутой цепи на свободные заряды должны действовать *сторонние силы* неэлектростатической природы. Действительно, работа электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю; не совершая работы, это поле не может скомпенсировать тепловые потери на сопро-

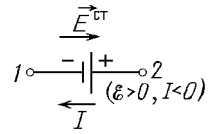


Рис. 54

тивлениях цепи. Источник сторонних сил называют *источником тока*, а участок цепи, содержащий источник, — *неоднородным участком*. Сторонние силы имеют электромагнитную природу: $\vec{F}^{\text{ст}} = q\vec{E}^{\text{ст}}$. Работа источника тока отлична от нуля и пропорциональна q , а не зависящая от q величина

$$\mathcal{E} = \left| \frac{A_q^{\text{ст}}}{q} \right| \quad (23)$$

является его характеристикой. Ее называют *электродвижущей силой* (ЭДС) и выражают в вольтах. На схеме источник изображают, как показано на рис. 54: внутри источника $\vec{E}^{\text{ст}}$ направлена от (—) к (+) (если замкнуть его на сопротивление, ток во внешней цепи потечет от (+) к (—)). Кроме ЭДС, источник тока характеризуется своим *внутренним сопротивлением* r .

► **Закон Ома для неоднородного участка цепи.** В локальном законе Ома (18) $\vec{E} = \vec{E}^{\text{эл}} + \vec{E}^{\text{ст}}$. В обобщенном законе Ома (21) $A_q = A_q^{\text{эл}} + A_q^{\text{ст}}$, т.е. с учётом (10) и (23)

$$Ir = (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}). \quad (24)$$

ЭДС надо брать со знаком (+), если $\vec{E}^{\text{ст}}$ направлена от 1 к 2, и со знаком (—) — в противоположном случае. Если сила тока I получается отрицательной, то ток идет от 2 к 1 (рис. 54).

Замечание. Если $I = 0$ (разомкнутая цепь), то $\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E}$. Это же простое соотношение выполняется в случае *идеального* ($r = 0$) источника тока. (В обоих случаях электростатическое поле внутри источника компенсирует поле сторонних сил, и работа этих полей оказывается одинаковой.) При решении задач удобно

разделять реальный источник тока $(\mathcal{E}, r)$ на два последовательных элемента: идеальный источник $\mathcal{E}$ и чистое сопротивление r .

► **Мощность сторонних сил. Закон Ома для полной цепи.**

Запишем закон сохранения энергии для замкнутой цепи, содержащей один источник тока. Каждую секунду источник совершает работу (см. (23))

$$P_{\text{ст}} = \frac{A_q^{\text{ст}}}{t} = \frac{q\mathcal{E}}{t} = \mathcal{E}I,$$

которая превращается в тепловую энергию на сопротивлении источника r и внешнем сопротивлении R :

$$\mathcal{E}I = I^2r + I^2R.$$

Сокращая на I , получаем закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}. \quad (25)$$

Сила тока короткого замыкания источника равна ($R = 0$):

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Чтобы найти разность потенциалов на зажимах источника тока, можно использовать закон Ома (24) для источника, но проще записать закон Ома (19) для внешней цепи:

$$U_{\text{зж}} = \varphi_+ - \varphi_- = IR.$$

► **Соединение источников тока.**

1. *Последовательно соединенные источники* (рис. 54а) можно заменить одним эквивалентным, ЭДС которого

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_N,$$

а внутреннее сопротивление

$$r = r_1 + \dots + r_N,$$

где $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ — ЭДС отдельных источников, а $r_1, \dots, r_N$ — их сопротивления. Если источник включен навстречу направлению обхода (т.е. мы идем против сторонних сил), то его ЭДС стоит со знаком $(-)$. Пример: батарею из N последовательно соединенных одинаковых источников $(\mathcal{E}, r)$ можно заменить на источник $(N\mathcal{E}, Nr)$.

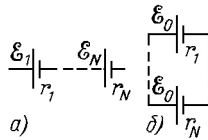


Рис. 55

2. В случае *параллельного соединения* N источников (рис. 55 б) с одинаковыми ЭДС, равными $\mathcal{E}_0$, из (24) получаем

$$\begin{aligned} I &= I_1 + \dots + I_N = \frac{1}{r_1}(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_0) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_N} \right) (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_0), \end{aligned}$$

т.е. эквивалентная ЭДС равна ЭДС каждого источника $\mathcal{E}_0$, а эквивалентное сопротивление вычисляется по обычной формуле для параллельного соединения. Пример: N параллельно соединенных одинаковых источников $(\mathcal{E}, r)$ можно заменить на источник $(\mathcal{E}, r/N)$.

Вопрос. Обычно на неоднородном участке цепи действуют как сторонние, так и электростатические силы; на однородном участке ток поддерживается только электростатическими силами. А может ли ток поддерживаться только сторонними силами, без участия электростатических?

Ответ. Да, может. Самый простой пример — один источник, к зажимам которого присоединено нулевое сопротивление. Другой интересный пример — несколько одинаковых источников $(\mathcal{E}, r)$, включенных в одну сторону и образующих замкнутую цепь. Ток в цепи равен $\mathcal{E}/r$, и из (24) получаем, что разность потенциалов на каждом источнике равна нулю. Впрочем, это ясно и без вычислений, из симметрии схемы: если бы потенциал возрастал при прохождении одного источника, то на столько же он возрастал бы на каждом из источников, и при полном обходе контура и возвращении в начальную точку он не был бы равен исходному значению.

► **Энергетические соотношения для неоднородного участка цепи.** При наличии сторонних сил в законе сохранения энергии надо учитывать три члена: а) работу сторонних сил $A_q^{\text{ст}} = q\mathcal{E} = \mathcal{E}It$; б) работу электростатических сил $A^{\text{эл}} = qU = UI t$; в) выделяющуюся теплоту (энергию, получаемую кристаллической решеткой от носителей тока при столкновениях, а затем отдаваемую внешним телам в виде теплоты) $W^{\text{тепл}} = I^2 r t$. Смысл каждого из этих членов зависит от предназначения участка цепи. Разберем два основных случая.

С л у ч а й 1. Источник тока передает во внешнюю цепь энергию, полученную от внешних (сторонних) сил (генератор, гальванический элемент). Создав на своих зажимах напряжение U (рис. 56 а), источник совершает во внешней цепи *работу* $UI t$. В самом деле, из полной мощности сторонних сил

$$P_{\text{полн}} = \mathcal{E}I$$

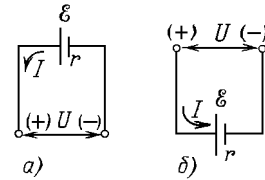


Рис. 56

часть теряется в виде тепла в самом источнике:

$$P_{\text{потер}} = I^2 r,$$

а оставшаяся часть передается во внешнюю цепь:

$$P_{\text{полезн}} = \mathcal{E}I - I^2 r = UI$$

(по закону Ома (24) $Ir = \mathcal{E} - U$). Зависимость $P_{\text{полезн}}$ от I (при $\mathcal{E}, r = \text{const}$) имеет вид параболы. Полезная мощность обращается в нуль при $I = 0$ (цепь разомкнута) и при $I = \mathcal{E}/r$ (ток короткого замыкания), а достигает максимума при $I = \mathcal{E}/2r$.

Если внешняя цепь состоит только из сопротивления, то $I = \mathcal{E}/(R + r)$, и полезная мощность равна

$$P_{\text{полезн}} = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{r + R} \right)^2 R. \quad (26)$$

Максимальная мощность достигается при $R = r$ (при этом $I = \mathcal{E}/(R + r) = \mathcal{E}/2r$). Одна и та же мощность $P_{\text{полезн}}$ получается при двух значениях тока I_1 и I_2 , т.е. при двух значениях R : R_1 и R_2 . Эти значения можно найти из уравнения (26), которое преобразуется к виду приведенного квадратного уравнения:

$$R^2 + R \left(2r - \frac{\mathcal{E}^2}{P_{\text{полезн}}} \right) + r^2 = 0.$$

Из теоремы Виета получаем полезное соотношение для R_1 и R_2 :

$$R_1 R_2 = r^2.$$

КПД источника тока равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}} = \frac{R}{r + R}$$

(чем меньше ток, тем больше η).

С л у ч а й 2. Неоднородный участок цепи предназначен для совершения положительной работы против внешних (сторонних) сил (электродвигатель, зарядка аккумулятора и т.д.). Потребляемая участком полная мощность равна:

$$P_{\text{полн}} = UI,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение на концах цепи (рис. 56 б). Часть этой мощности теряется в виде тепла, выделяемого на сопротивлении обмотки двигателя:

$$P_{\text{потер}} = I^2 R,$$

а оставшаяся часть соответствует работе против внешних сил:

$$P_{\text{полезн}} = UI - I^2 R = \mathcal{E}I.$$

(В этом случае по закону Ома (24) $IR = -\mathcal{E} + U$; работа сторонних сил отрицательна, т.е. работа против внешних сил положительна.)

ЭДС электродвигателя пропорциональна скорости вращения ротора; она обращается в нуль при $I = U/R$ (полное затормаживание ротора, $\mathcal{E} = 0$) и при $I = 0$ (свободное вращение ротора без нагрузки, $\mathcal{E} = U$). КПД электродвигателя равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = 1 - \frac{IR}{U}.$$

► **Электронная проводимость металлов.** В металлах свободными носителями тока являются электроны. Основные предположения электронной теории: а) между столкновениями с ионами кристаллической решетки электроны движутся свободно; б) при каждом соударении полностью теряется скорость упорядоченного движения (все направления конечной скорости равновероятны). За время t электрон под действием поля приобретает скорость упорядоченного движения $v = at = (eE/m_e)t$. Усредняя по всем электронам, получим: $v_{\text{ср}} = (eE/m_e)\tau$, где τ — среднее время между столкновениями. Так как $j = nev_{\text{ср}}$ (см. (17)), то для j получаем:

$$j = \frac{ne^2\tau}{m_e}E,$$

т.е. локальный закон Ома (18). Для *удельного сопротивления металлов* получаем:

$$\rho = \frac{m_e}{e^2n\tau}. \quad (27)$$

Концентрация свободных электронов в металлах n почти не зависит от температуры, и температурная зависимость сопротивления определяется средним временем τ между столкновениями электронов с ионами решетки.

► **Сверхпроводимость.** Явление *сверхпроводимости* было открыто в 1911 г. Камерлинг-Онессом. Уменьшая температуру медного образца, он обнаружил, что при достижении критической температуры $T_c \approx 4,1$ К сопротивление образца скачком обращается в нуль. При $T < T_c$ прохождение тока через образец происходит без потерь энергии. Сверхпроводимость наблюдается у многих металлов и сплавов, но критические температуры слишком малы ($T_c < 25$ К), что сильно осложняет ее практическое использование. В 1987 году было открыто явление *высокотемпературной сверхпроводимости*: у некоторых керамических соединений T_c достигает 100 К и выше, что позволяет использовать для охлаждения сравнительно дешевый жидкий азот.

► **Электрический ток в жидкостях.** При растворении в воде веществ, называемых *электролитами*, под действием электрического поля полярных молекул воды происходит распад молекул

электролита на заряженные ионы (*электролитическая диссоциация*). В растворе появляются носители тока — положительные и отрицательные ионы, каждый из которых характеризуется своей массой $m_0 = M/N_A$ (M — молярная или атомная масса иона) и зарядом $q_0 = ne$ (n — валентность иона). Например, при диссоциации CuSO_4 образуются двухвалентные положительные ионы меди (Cu^{++} , $M \approx 63,55$ кг/кмоль) и двухвалентные отрицательные ионы SO_4^{--} . Протекание тока через электролит сопровождается выделением на электродах вещества (явление *электролиза*).

► **Законы электролиза.** Так как все выделившиеся на электроде ионы имеют одинаковый заряд q_0 и массу m_0 , то выделившаяся при электролизе масса пропорциональна прошедшему заряду (*первый закон Фарадея*):

$$m = kq = kIt.$$

Коэффициент k называют *электрохимическим эквивалентом* вещества (выражают в кг/Кл); он равен отношению массы иона к его заряду:

$$k = \frac{m_0}{q_0} = \frac{1}{N_A e} \frac{M}{n} = \frac{1}{F} \frac{M}{n},$$

т.е. электрохимический эквивалент вещества пропорционален его *химическому эквиваленту* M/n (*второй закон Фарадея*). Константу $F = N_A e \approx 96500$ Кл/моль называют *постоянной Фарадея*.

► **Электрический ток в газах.** Электрический ток в газах (*газовый разряд*) наблюдается в том случае, если достаточная часть атомов газа ионизирована. (*Ионизация атома* — отделение электрона с образованием положительного иона). Освобожденные электроны и являются обычно основными носителями тока в газе. Для изучения разряда используют лампу с двумя электродами — катодом и анодом, — заполненную изучаемым газом. (Потенциал *анода* положительный, *катода* — отрицательный. Электроны движутся от катода к аноду.) Впрочем, разряд может происходить и в открытом пространстве (вольтова дуга, молния).

Ионизация может происходить: а) при нагревании газа — скорость теплового движения растет, и электроны выбиваются в атомных столкновениях; б) при облучении газа — выбивание электронов квантами света (фотонами); в) при увеличении напряженности поля — за счет ускорения этим полем образовавшихся ранее электронов (*электронный удар*).

Первые два случая называют *несамостоятельным разрядом* — при прекращении нагревания или облучения разряд останавливается. Образовавшиеся ранее электроны быстро исчезают — либо

дойдя до анода, либо воссоединившись с ионами (явление *рекомбинации*).

Ионизацию электронным ударом называют *самостоятельным разрядом*. Если начался самостоятельный разряд, то внешние источники ионизации (облучение, нагревание) можно удалить, и разряд будет продолжаться. Условие начала разряда: энергия электрона, приобретенная им на длине свободного пробега l , превышает работу ионизации атома A_i :

$$eEl > A_i.$$

При выполнении этого условия в газе возникает электронная лавина. Условие поддержания разряда: эмиссия (испускание) электронов с катода газоразрядной трубки. Эмиссия происходит за счет бомбардировки катода положительными ионами. При этом катод нагревается, что приводит к *термоэлектронной эмиссии* (испарению электронов). При больших энергиях ионов вступает в игру непосредственное выбивание электронов ионами при ударе о катод.

Виды самостоятельного разряда: тлеющий разряд, электрическая дуга, коронный разряд, искровой разряд.

► **Плазма.** *Плазма* (четвертое состояние вещества) — частично или полностью ионизированный газ. Обладает особыми свойствами за счет электромагнитного взаимодействия частиц плазмы, приводящего к необычным плазменным колебаниям и волнам. Примеры плазмы: а) вещество Солнца, звезд; б) межзвездная среда; в) ионосфера; г) газ в состоянии разряда; д) высокотемпературная плазма при термоядерном синтезе и т.д.

► **Ток в вакууме.** Для протекания тока в вакууме носители тока должны поступать извне. Обычно ток создается электронами, вылетающими из *катода* электронной лампы вследствие термоэлектронной эмиссии (или при облучении катода светом — см. фотоэффект). В отличие от самостоятельного разряда в газе, для появления эмиссии катод надо специально разогревать.

Так как заряды поступают только с нагретого катода, ток может протекать только в одном направлении — от *анода* к катоду. Вольтамперная характеристика электронной лампы — *диода* — приведена на рис. 57 ($U = \varphi_{\text{ан}} - \varphi_{\text{кат}}$). При $U < 0$ ток не течёт. При малом положительном U сила тока невелика, так как большинство эмиссионных электронов возвращается на катод, отталкиваясь от образовавшегося возле катода «электронного облака». При возрастании U облако постепенно рассасывается, сила тока возрастает, по-

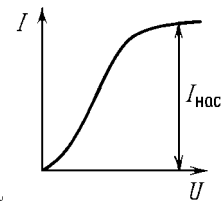


Рис. 57

ка не наступает насыщение (все вылетающие электроны достигают анода, сила тока больше не растёт).

Для управления электронным облаком недалеко от катода помещают третий электрод — *сетку*. Такую лампу — *триод* — используют для усиления и генерации тока и напряжения. Небольшое изменение потенциала сетки (входное напряжение) сильно влияет на структуру облака, т.е. приводит к заметному изменению анодного тока. С сопротивлений в анодной цепи снимают усиленное выходное напряжение.

Электроннолучевая трубка используется в телевизорах и осциллографах для создания управляемого изображения на экране с помощью узкого электронного пучка. Электроны испускаются нагретым катодом и фокусируются в пучок полем специальной структуры (электрической или магнитной линзой). Для управления пучком используют два конденсатора (с горизонтально и вертикально расположенными обкладками), при пролете через которые направление скорости электрона изменяется пропорционально напряжению на конденсаторе (управляющему напряжению). В телевизионном кинескопе управление пучком осуществляется с помощью магнитного поля катушек с током.

► **Ток в полупроводниках.** *Полупроводниками* называют вещества, в которых число свободных зарядов сильно зависит от температуры. При низких температурах свободных зарядов практически нет, т.е. полупроводник является диэлектриком. Однако уже при комнатной температуре полупроводник проводит ток, хотя концентрация свободных зарядов в нем обычно на несколько порядков меньше, чем в металле. Эти свойства полупроводника объясняются тем, что работа, необходимая для разрыва связи и образования свободного заряда, сравнима с энергией теплового движения при комнатной температуре: $E_{\text{ср}} \sim kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \approx 0,04 \text{ эВ}$. (*Электронвольт* (эВ) — внесистемная единица энергии, равная энергии, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов $U_0 = -1 \text{ В}$: $1 \text{ эВ} = (-e)U_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.) Удельное сопротивление полупроводников на несколько порядков больше, чем у металлов, и быстро уменьшается с увеличением температуры за счет увеличения концентрации свободных носителей тока (см. (27)).

► **Типы полупроводников.** Различают три типа *полупроводников* (и три *механизма проводимости*).

1. Чистые полупроводники. *Чистые полупроводники* (кремний, германий), обладающие *собственной проводимостью*. В создании тока участвуют в равной мере свободные заряды двух типов: отрицательные (электроны) и положительные (*дырки*). Что-

бы электрон стал свободным, ему нужно покинуть место, которое он занимает в системе ковалентных связей решетки («разорвать» связь). Однако при освобождении одной из ковалентных связей появляется еще одна возможность перемещать заряд вдоль вещества: на освобожденное место перемещается другой электрон из системы ковалентных связей, на его место — третий и т.д. Так как все связи эквивалентны, такое перемещение электронов от связи к связи не требует затрат энергии. Перемещение множества электронов «по очереди» можно заменить перемещением одного свободного заряда $+e$; такие носители тока называют «дырками». Под действием внешнего поля движение дырок приобретает направленный характер — вдоль поля. В чистом полупроводнике концентрации свободных электронов и дырок одинаковы.

2. Примесные полупроводники n -типа. *Примесные полупроводники n -типа*, обладающие *электронной проводимостью* (например, примесь мышьяка в кремнии). Примесные атомы, занимающие часть мест в кристаллической решетке, обладают большей валентностью, чем основные атомы, т.е. содержат один лишний электрон. Эти лишние электроны слабо связаны с решеткой (слабее, чем электроны ковалентных связей основной решетки). При повышении температуры эти электроны становятся свободными; так как при этом не образуется вакансий в ковалентных связях, то концентрация электронов в полупроводниках n -типа гораздо больше, чем концентрация дырок.

3. Примесные полупроводники p -типа. *Примесные полупроводники p -типа*, обладающие *дырочной проводимостью* (примесь индия в кремнии). Примесные атомы обладают меньшей валентностью, и возле каждого из них есть свободная ковалентная связь. Она отличается от ковалентной связи основной решетки, но для перехода от основной ковалентной связи к примесной электрону нужна гораздо меньшая энергия, чем для полного освобождения. Такой переход приводит к образованию дырки без возникновения свободного электрона (он оказывается связанным с атомом примеси), поэтому основными носителями тока в полупроводниках p -типа являются дырки.

► **Полупроводниковый диод.** Полупроводниковый диод представляет собой соединение (контакт) полупроводников p - и n -типов. Сопротивление области контакта (p - n перехода) сильно зависит от направления тока: оно гораздо меньше для прямого тока (от p к n), чем для обратного. Дело в том, что за счет диффузии основных носителей тока в чужой полупроводник

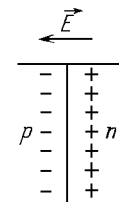


Рис. 58

в области контакта образуется двойной электрический слой, препятствующий движению зарядов (рис. 58). Внешнее поле, направленное от p к n , частично компенсирует действие этого слоя,

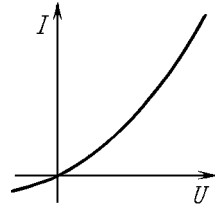


Рис. 59

и при увеличении напряжения ток быстро возрастает (прямой ток). При обратном направлении поля запирающее напряжение, наоборот, возрастает, и наблюдается слабый обратный ток (рис. 59), осуществляемый малым количеством неосновных носителей (дырок в полупроводниках n -типа, электронов в полупроводниках p -типа).

► **Транзистор.** Транзистор является полупроводниковым аналогом триода. Он состоит (рис. 60) из двух полупроводников p -типа (*эмиттер* и *коллектор*), между которыми находится очень тонкая прослойка полупроводника n -типа (*база*). Один из контактов работает в режиме прямого тока; в его цепь (цепь эмиттера) подают входное напряжение, и от его значения сильно зависит число дырок, прошедших от эмиттера к базе. Почти все эти дырки диффундируют через тонкую базу и достигают второго $p - n$ перехода. Этот переход работает в режиме обратного тока (режим неосновных носителей); продиффундировавшие сквозь базу дырки (неосновные носители для базы) подхватываются запирающим

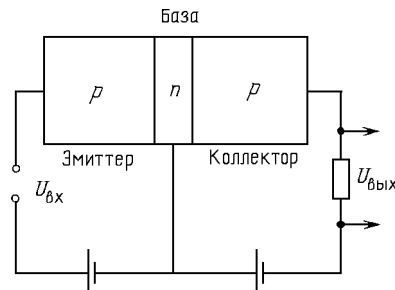


Рис. 60

слоем и осуществляют ток в цепи коллектора. Выходное напряжение снимают с сопротивления, включенного в цепь коллектора.

§ 3. Магнетизм

► **Магнитное поле.** Электрическое поле вводят для описания электрического взаимодействия между любыми заряженными частицами. Магнитное поле описывает *магнитное взаимодействие*, возникающее между: а) двумя токами; б) током и движущимся зарядом; в) двумя движущимися зарядами. Кроме того, токи и движущиеся заряды взаимодействуют с намагниченными телами. (Магнитное взаимодействие движущихся зарядов теряется на фоне

гораздо более сильного электрического взаимодействия. Напротив, токи и магниты могут быть электрически нейтральными, и магнитное взаимодействие выступает в чистом виде.) Электрическое поле создается любыми зарядами и действует на любые пробные заряды. Магнитное поле создается токами, магнитами и движущимися зарядами и действует на внесенные в него токи, магниты и движущиеся заряды.

► **Магнитная индукция.** Количественной характеристикой магнитного поля является вектор *магнитной индукции* $\vec{B}$. Его удобно определять по ориентирующему действию магнитного поля на маленький виток с током, внесенный в данную точку поля («пробный» виток). Определение $\vec{B}$ основано на следующих экспериментальных фактах.

1. На маленький виток с током в магнитном поле действует *вращательный момент* M . Если на виток действует только магнитное поле, то он будет поворачиваться до тех пор, пока не окажется в устойчивом положении. При этом направление положительной нормали к витку, определяемое по направлению тока с помощью *правила буравчика*, оказывается одним и тем же для всех пробных витков. Это направление принимают за направление вектора $\vec{B}$.

2. Максимальный вращательный момент $M_{\text{макс}}$ пропорционален площади витка и силе тока в нем и не зависит от формы витка. Отношение $M_{\text{макс}}$ к произведению IS не зависит от свойств витка, т.е. является характеристикой поля:

$$B = \frac{M_{\text{макс}}}{IS}. \quad (28)$$

В СИ магнитную индукцию выражают в *тесла* (Тл).

► **Линии магнитной индукции.** *Линии индукции магнитного поля* $\vec{B}$ проводят по тем же правилам, что и силовые линии поля $\vec{E}$. Как и силовые линии, линии магнитной индукции непрерывны в пустом пространстве. Но если линии $\vec{E}$ начинаются и кончаются на источниках поля — электрических зарядах, то линии $\vec{B}$ либо замкнуты, либо уходят на бесконечность (поэтому магнитное поле называют *вихревым*). Вывод: в природе не существует магнитных зарядов — источников магнитного поля.

Описание правил, по которым можно найти магнитное поле заданной системы токов, выходит за рамки школьного курса. Ограничимся описанием поля для трех случаев, изображенных на рис. 61.

а) Бесконечный прямой провод с током (рис. 61а). Линии индукции представляют собой концентрические окружности. Если буравчик вращать в направлении $\vec{B}$, он должен двигаться по току.

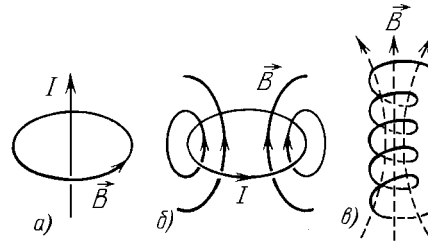


Рис. 61

б) Виток с током (рис. 61 б). Проходя через плоскость витка, линии индукции замыкаются снаружи. Направление линий в плоскости витка определяется правилом буравчика — только теперь его надо вращать по току.

в) Бесконечно длинная катушка (рис. 61 в). Поле внутри катушки (соленоида) — однородное. В катушке конечной длины поле у краев искривляется.

► **Закон Ампера.** Закон Ампера позволяет находить силу, действующую со стороны однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ на прямолинейный участок тока длиной l , если сила тока в нем равна I (направление тока будем задавать с помощью вектора $\vec{l}$, как показано на рис. 62). Закон Ампера сводится к следующим правилам:

1. Если угол между $\vec{B}$ и $\vec{l}$ равен α , то

$$|\vec{F}| = IBl \sin \alpha.$$

2. $\vec{F} \perp \vec{B}$ и $\vec{F} \perp \vec{l}$, т.е. $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости, проходящей через вектора $\vec{B}$ и $\vec{l}$.

3. Для выбора одного из двух оставшихся направлений для $\vec{F}$ можно использовать либо *правило левой руки* (линии $\vec{B}$

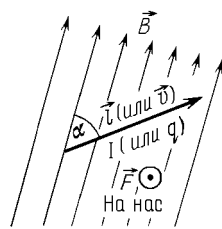


Рис. 62

входят в ладонь, сведенные пальцы — по току, отведенный большой палец указывает направление силы), либо *правило буравчика* (вектор $\vec{l}$ поворачиваем к вектору $\vec{B}$, буравчик движется в направлении вектора $\vec{F}$). Силу F называют *силой Ампера*.

Применяя эти правила, можно убедиться в том, что два длинных параллельных провода с током притягиваются, если токи текут в одну сторону, и отталкиваются, если — в разные.

Пример 16. Убедимся в том, что закон Ампера согласуется с определением (28) индукции магнитного поля. Вычислим вращательный момент, действующий на прямоугольный виток $a \times b$ с током в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Вращательный момент относительно оси, перпендикулярной линиям

индукции и проходящей через середины противоположных сторон (рис. 63 а), создается силами Ампера, действующими на две другие противоположные стороны, параллельные этой оси. Каждая из этих сил равна $F_A = IBa$, а плечо каждой силы зависит от расположения контура: $d = (b/2) \sin \alpha$, где α — угол между нормалью к контуру и вектором $\vec{B}$. Видно, что максимальное значение вращательного момента $M = 2F_A d = IBab \sin \alpha = IBS \sin \alpha$ равно $M_{\text{макс}} = IBS$, что согласуется с (28). Вращательный момент обращается в ноль при двух значениях угла: $\alpha = 0$ и $\alpha = 180^\circ$, однако второе положение равновесия неустойчиво. (В этом положении обе силы Ампера направлены в сторону оси вращения, и при случайном отклонении на небольшой угол возникающий момент сил стремится этот угол увеличить (рис. 63 б).)

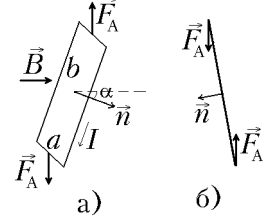


Рис. 63

► **Сила Лоренца.** *Силой Лоренца* называют силу, действующую со стороны магнитного поля на движущийся заряд. Если заряд частицы q_0 , а скорость $\vec{v}$, то эту силу можно рассчитать по следующим правилам (рис. 62).

1. Если угол между $\vec{B}$ и $\vec{v}$ равен α , то

$$|\vec{F}| = q_0 v B \sin \alpha.$$

2. $\vec{F} \perp \vec{B}$ и $\vec{F} \perp \vec{v}$.

3. Заменяя мысленно частицу током соответствующего направления ($q_0 > 0$ — ток направлен вдоль $\vec{v}$, $q_0 < 0$ — против), применяем правило левой руки или правило буравчика, как для силы Ампера.

Сила Лоренца и сила Ампера связаны друг с другом. Сила Ампера равна сумме сил Лоренца, действующих на свободные заряды данного участка провода. Действительно, считая, что каждая частица движется со скоростью $v_{\text{ср}}$ вдоль провода, и учитывая, что сила тока I связана с $v_{\text{ср}}$ соотношением $I = q_0 v_{\text{ср}} n S$ (см. (17)), получаем для силы Ампера

$$F_A = IBl \sin \alpha = N(q_0 v_{\text{ср}} B \sin \alpha) = N F_{\text{л}}, \quad (29)$$

где $N = n l S$ — число свободных зарядов на данном участке провода.

Пример 17. Рассмотрим вращение частицы в магнитном поле. Если частица массой m с зарядом q_0 влетает в однородное магнитное поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной $\vec{B}$, то под действием силы Лоренца она начнет двигаться по дуге окружности. Радиус окружности R и период вращения T могут быть найдены из второго закона Ньютона $q_0 v B = m v^2 / R$:

$$R = \frac{m v}{q_0 B}, \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q_0 B}.$$

Видно, что период вращения не зависит от скорости частицы.

Отметим важное свойство силы Лоренца: так как она направлена перпендикулярно к скорости, то работа магнитного поля над

частицами равна нулю.

► **Магнитные свойства вещества.** Вещество, создающее собственное магнитное поле, называется намагниченным. *Намагниченность* возникает при помещении вещества во внешнее магнитное поле. В простейших случаях (бесконечная среда, стержень внутри соленоида) магнитная индукция в веществе $\vec{B}$ выражается через магнитную индукцию внешнего поля $\vec{B}_0$ (в той же точке пространства) по формуле:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0, \quad (30)$$

где μ — коэффициент, характеризующий магнитные свойства среды; его называют *магнитной проницаемостью среды*.

В соответствии с гипотезой Ампера магнитные свойства вещества можно объяснить циркулирующими внутри него замкнутыми токами. Эти токи образуются движением электронов в атомах и молекулах. В отсутствие магнитного поля молекулярные токи располагаются хаотически, а создаваемое ими магнитное поле в среднем равно нулю. Во внешнем магнитном поле эти токи частично упорядочиваются и создают отличное от нуля магнитное поле.

Вещества, намагничивание которых во внешнем поле происходит благодаря частичной ориентации хаотически направленных «атомных токов» (см. рис. 61б), называют *парамагнетиками* (азот, воздух, алюминий, платина). Атомные токи в парамагнетиках ориентируются таким образом, что создаваемое ими поле направлено так же, как внешнее поле, т.е. усиливает его (см. рис. 61). У парамагнетиков $\mu > 1$ (но не велико). Если же атомные токи в каждом атоме, протекая в разные стороны, полностью компенсируются, то вещество называют *диамагнетиком* (медь, вода, инертные газы). В диамагнетиках ориентационный механизм отсутствует, и проявляется другой, гораздо более слабый, механизм намагничивания, приводящий не к усилению, а к небольшому ослаблению внешнего поля ($\mu < 1$). При «включении» внешнего магнитного поля действие силы Лоренца на вращающиеся вокруг ядра электроны приводит к искажению их орбит, и противоположно направленные электронные токи перестают полностью компенсировать друг друга — в каждом атоме возникает слабый результирующий ток, нормаль к которому направлена *против* внешнего поля.

Замечание. Интересно сравнить механизмы намагничивания с механизмами поляризации полярных и неполярных диэлектриков.

► **Ферромагнетики.** Особыми свойствами обладают *ферромагнетики*, магнитная проницаемость которых очень велика (μ порядка $10^3 \div 10^5$). Перечислим их основные свойства.

1. Главным источником магнитного поля ферромагнетиков является не движение электронов по орбитам, а собственное «вращение» электронов. Хотя слово вращение носит условный характер, оно делает наглядным тот факт, что неподвижный электрон создает вокруг себя такое же поле, как маленький замкнутый ток (его называют элементарным током).

2. Ферромагнетик состоит из маленьких областей, называемых *доменами*, в каждом из которых элементарные токи электронов ориентированы строго в одном направлении (объяснение этому дает квантовая механика). При помещении во внешнее магнитное поле размеры одних доменов увеличиваются, других — уменьшаются. Кроме того, происходит разворот доменов как целого; в результате быстро возрастает создаваемое ферромагнетиком магнитное поле.

3. Магнитное поле в ферромагнетике $\vec{B}$ оказывается не пропорциональным внешнему полю $\vec{B}_0$. Сохраняя определение (30), говорят, что μ зависит от величины поля.

4. При удалении внешнего поля домены не возвращаются полностью в прежнее положение. Вещество оказывается намагниченным в отсутствие внешнего поля. Такие намагниченные тела называют *постоянными магнитами*.

5. Ферромагнитные свойства вещества пропадают, если его нагреть до характерной для данного вещества температуры, которую называют *температурой Кюри*.

► **Электромагнитная индукция.** Явление электромагнитной индукции заключается в том, что при изменении числа линий магнитной индукции, пронизывающих замкнутый контур, в нем возникает ЭДС.

► **Магнитный поток.** Для количественного описания явления вводят величину, пропорциональную числу пронизывающих контур линий магнитной индукции, — *магнитный поток*. Если нормаль к плоскости контура $\vec{n}$ составляет угол θ с вектором индукции однородного магнитного поля $\vec{B}$, то поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадь, ограниченную контуром, определяют как

$$\Phi = BS \cos \theta,$$

где S — площадь контура. Магнитный поток выражают в *веберах* ($\text{Вб} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2$). Чтобы определение потока было однозначным, надо выбрать направление положительной нормали $\vec{n}$ к контуру. Поток через катушку из N витков в N раз больше потока через один виток.

► **Закон электромагнитной индукции.** Закон электромагнитной индукции (или закон Фарадея) утверждает, что наведенная в контуре ЭДС (*ЭДС индукции*) равна скорости изменения потока, пронизывающего площадь контура:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (31)$$

При конечном Δt эта формула дает определение средней ЭДС. Чтобы получить мгновенное значение ЭДС, надо Δt устремить к нулю: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Phi'(t)$.

Пример 18. Вычислим среднюю ЭДС в следующем случае. Пусть катушка, содержащая N витков площадью S , помещена в однородное поле с индукцией B так, что ее ось параллельна линиям поля. Повернем катушку на 180° . На первый взгляд, поток не изменился: его величина равна NBS как до поворота, так и после. Но ответ, что средняя ЭДС равна нулю, неверен — хотя модуль Φ не изменился, изменился его знак, так как вместе с катушкой на 180° повернулась и положительная нормаль к плоскости витков. Значит, изменение потока равно $|\Delta\Phi| = 2NBS$, откуда для средней ЭДС получаем $|\mathcal{E}_{\text{ср}}| = |\Delta\Phi|/\Delta t = 2NBS/\Delta t$ (Δt — время поворота). Интересно отметить, что хотя средняя ЭДС зависит от времени поворота, прошедший через контур заряд (если цепь катушки замкнута) не зависит от того, как быстро меняется поток, а определяется только его полным изменением $\Delta\Phi$. Действительно, прошедший заряд можно выразить через средний ток: $q = I_{\text{ср}}\Delta t$, а средний ток в цепи можно связать со средней ЭДС с помощью закона Ома для полной цепи: $I_{\text{ср}} = \mathcal{E}_{\text{ср}}/R$, где R — полное сопротивление цепи. Получаем $q = |\Delta\Phi|/R$, т.е. в данном случае $q = 2NBS/R$.

► **Правило Ленца.** Так как после выбора положительной нормали к контуру знак Φ определен, то формула (31) позволяет найти как величину, так и знак ЭДС. По знаку ЭДС можно узнать направление сторонних сил в контуре: если ЭДС отрицательна, то сторонние силы направлены против направления обхода контура. Однако выбор положительного направления обхода уже не является произвольным: при вращении буравчика в этом направлении он должен двигаться в сторону положительной нормали.

Указанное правило является формальным выражением *правила Ленца*: ЭДС индукции направлена так, чтобы вызванный ею индукционный ток создавал в окружающем пространстве собственное магнитное поле, частично компенсирующее то изменение потока внешнего поля, в результате которого эта ЭДС возникла.

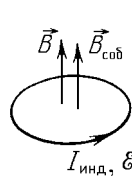


Рис. 64

Пример 19. Пусть $\vec{B}$ на рис. 64 уменьшается по величине. Тогда $\vec{B}_{\text{соб}}$ по правилу Ленца должна быть направлена в ту же сторону, что и $\vec{B}$. Такое поле создается током $I_{\text{инд}}$, направление которого указано на рис. 64 (см. также рис. 61 б). Этот же ответ можно получить из формулы (31). Направляя нормаль в сторону $\vec{B}$, получим: $\Phi > 0$, $\Delta\Phi < 0$, $\mathcal{E}_{\text{инд}} > 0$, т.е. ток течет в направлении положительного обхода контура, которое определяется правилом буравчика и в нашем примере совпадает с направлением индукционного тока, найденным по правилу Ленца (рис. 64).

Правило Ленца связано с законом сохранения энергии и в более широкой формулировке гласит, что любые последствия индукционных процессов должны иметь ослабляющее, компенсирующее действие. Например, при приближении магнита к контуру в последнем возникает индукционный ток такого направления, что контур и приближаемый магнит отталкиваются друг от друга.

► **Природа ЭДС индукции.** Чтобы выяснить природу индукционных сторонних сил, рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Движение контура (или его частей) в независимом от времени магнитном поле (например, удаление контура от магнита). На свободные заряды внутри движущегося проводника действует сила Лоренца; она и является сторонней силой для закона электромагнитной индукции (31). Например, при движении перемычки длиной l (рис. 65) возникает ЭДС индукции, равная

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_q^{\text{ст}}}{q} = \frac{(qvB)l}{q} = Bvl.$$

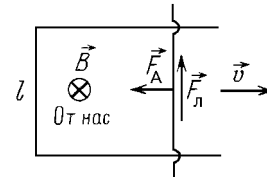


Рис. 65

Направление силы Лоренца (для случая $q > 0$ и $\vec{B}$, направленного от нас в плоскость чертежа) указано на рис. 65. Такой же ответ дает формула (31). Действительно, в этом случае поток $\Phi = BS \cos \alpha$ изменяется за счет изменения $S = lx(t)$. Подставляя Φ в (31), получаем: $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi|/\Delta t = Bl(\Delta x/\Delta t) = Bvl$.

Вопрос. Поскольку сила Лоренца выступает в роли сторонней силы в замкнутом контуре, то она совершает положительную работу, которая при протекании тока превращается в тепло. Но раньше отмечалось, что работа силы Лоренца над движущимися зарядами равна нулю, так как она перпендикулярна скорости. В чем тут дело?

Ответ. Полная работа силы Лоренца равна нулю. Одна компонента силы Лоренца, направленная вдоль перемычки, совершает над свободными зарядами в перемычке положительную работу $A_1 = \mathcal{E}I\Delta t = Bvl \cdot I\Delta t$, а другая компонента силы Лоренца, перпендикулярная перемычке, представляет собой не что иное, как силу Ампера (см. обсуждение перед формулой (29)). Сила Ампера направлена против скорости, ее работа равна $A_2 = -F_A \cdot v\Delta t = -IBl \cdot v\Delta t$. Сравнивая A_1 и A_2 , видим, что полная работа равна нулю.

Замечание. Сила Лоренца создает ЭДС и в том случае, если движется не часть замкнутого контура, а просто металлический стержень. Сила Лоренца перемещает свободные заряды в нем до тех пор, пока ее действие не будет полностью скомпенсировано электростатическими силами. Разность потенциалов на концах стержня равна

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl \sin \alpha,$$

где α — угол между скоростью стержня и вектором $\vec{B}$ (при условии, что сила Лоренца направлена вдоль стержня, т.е. что стержень перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$).

С л у ч а й 2. Контур неподвижен, поле изменяется со временем (например, удаление магнита от неподвижного контура). В этом случае свободные заряды неподвижны (средняя скорость теплового движения равна нулю), и сила Лоренца не может привести их в движение. Источником сторонних сил является *вихревое электрическое поле*, возникающее при изменении магнитного поля. Это

поле не является потенциальным, т.е. работа вихревого электрического поля по замкнутому контуру не равна нулю.

Пример 20. Изучим вихревое электрическое поле, возникающее при увеличении магнитной индукции длинного соленоида (катушки) со скоростью $\Delta B/\Delta t$. Силовые линии поля имеют вид окружностей с центрами, лежащими на оси соленоида. Для контура, имеющего вид окружности радиусом $r < R$ (R — радиус соленоида), ЭДС индукции равна $\mathcal{E} = 2\pi r E(r)$, а магнитный поток равен $\Phi = B\pi r^2$. Из закона электромагнитной индукции получаем

$$2\pi r E(r) = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad E(r) = \frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Интересно отметить, что вихревое поле возникает и вне соленоида, где магнитная индукция очень мала. При $r > R$ поток через контур радиусом r равен $\Phi = B\pi R^2$ (при r , сравнимых с длиной соленоида, поток начинает уменьшаться). Для напряженности получим $E(r) = (R^2/2r)(\Delta B/\Delta t)$.

Как убедиться в присутствии вихревого поля? Наденем на соленоид небольшое гладкое колечко с бусинкой массой m и зарядом q . При увеличении B на бусинку будет действовать вихревое поле. Из второго закона Ньютона $m\Delta v = qE\Delta t = (qR^2/2r)\Delta B$. Значит, при возрастании поля от нуля до B бусинка приобретет скорость $v = qR^2 B/(2mr)$.

Замечание. Важно отметить, что природа сторонних сил зависит от системы отсчета. Например, при удалении магнита и контура друг от друга наблюдатель, связанный с магнитом, объяснит возникновение в контуре ЭДС действием сил Лоренца, а наблюдатель, связанный с контуром, вынужден будет признать наличие вихревого электрического поля. Но каждый из них может вычислять ЭДС индукции по формуле (31).

► **Явление самоиндукции.** Если по контуру течет ток, то создаваемое им магнитное поле образует собственный магнитный поток $\Phi_{\text{соб}}$ через сам этот контур. Если ток изменяется, то будет изменяться и поток $\Phi_{\text{соб}}$, что должно привести к возникновению ЭДС, препятствующей изменению тока. Собственный магнитный поток пропорционален току:

$$\Phi_{\text{соб}} = LI, \quad (32)$$

где коэффициент пропорциональности L называют *индуктивностью* и выражают в *генри* (Гн). Индуктивность зависит от размеров и формы проводника с током и от свойств окружающей среды. Подставляя (32) в закон электромагнитной индукции (31), получаем выражение для ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{\text{сам}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (33)$$

При конечном Δt получаем среднюю ЭДС; устремляя Δt к нулю, получаем мгновенное значение $\mathcal{E}_{\text{сам}} = -LI'(t)$.

► **Энергия магнитного поля.** Если катушку с током отключить от источника и подключить к сопротивлению, то сила

тока не обратится сразу же в ноль, а будет плавно уменьшаться (иначе в катушке возникла бы большая ЭДС самоиндукции). При уменьшении тока на сопротивлении выделяется определенное количество теплоты, т.е. произойдет превращение энергии магнитного поля катушки во внутреннюю энергию. Расчет показывает, что в катушке с индуктивностью L запасена энергия

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (34)$$

Такую же работу должен совершить источник, чтобы создать ток I .

Глава 4. Колебания и волны

§ 1. Механические колебания и волны

► **Гармонические колебания.** *Механические колебания* — это движения тела, которые полностью или почти полностью повторяются через равные промежутки времени. *Гармоническими* называются колебания, при которых координата (смещение) тела x изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где величина A называется *амплитудой*, аргумент косинуса $\varphi = \omega t + \varphi_0$ — *фазой*, а ω — *циклической частотой* колебаний (измеряется в с^{-1}). Величину φ_0 называют *начальной фазой*, она соответствует начальному моменту времени $t = 0$. При изменении фазы на 2π колебания повторяются. Величина $T = 2\pi/\omega$ называется *периодом колебаний*. Обратная величина

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

называется *частотой* колебаний. В СИ частоту выражают в *герцах*; 1 Гц соответствует одному циклу колебаний в секунду. Проекция точки, равномерно движущейся по окружности, на ось, проходящую через центр окружности, совершает гармонические колебания.

► **Кинематика гармонических колебаний.** Изучением свойств гармонических колебаний без выяснения их конкретной физической природы занимается *кинематика* гармонических колебаний. К основным соотношениям кинематики относятся формулы для скорости и ускорения точки, которые мы получим,

вычислив первую, а затем вторую производную $x(t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0), \\ a(t) &= v'(t) = x''(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Видно, что *амплитуды колебаний скорости и ускорения равны*

$$v_{\max} = \omega A, \quad a_{\max} = \omega^2 A. \quad (3)$$

Рассмотрим два примера на кинематику гармонических колебаний.

Пример 1. Предположим, что нам известны начальные условия, т.е. скорость v_0 и положение x_0 точки в начальный момент времени (при $t = 0$), а также циклическая частота колебаний ω (частота гармонических колебаний определяется физической природой системы и от начальных условий не зависит). Найдём амплитуду и начальную фазу колебаний. Подставляя $t = 0$ в выражения для смещения (1) и для скорости (2), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0, \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (4)$$

Разделим второе уравнение на ω , после чего возведём оба уравнения в квадрат и сложим. Из полученного уравнения выражаем амплитуду: $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$. Чтобы найти начальную фазу, разделим уравнения друг на друга. Получим: $\operatorname{tg} \varphi_0 = -v_0/\omega x_0$. Окончательный выбор квадранта, из которого надо взять φ_0 , определяется знаками x_0 и v_0 в уравнениях (4). Отметим два самых распространённых случая (ответ для которых ясен и без уравнений): а) тело отводят в крайнее положение и отпускают ($x_0 = A$, $v_0 = 0$, $x = A \cos \omega t$); б) телу в положении равновесия ($x = 0$) сообщают начальную скорость v_0 в положительном направлении ($x = A \sin \omega t$).

Пример 2. Рассмотрим тело, совершающее гармонические колебания с периодом T . Выясним, какое время затрачивается на прохождение различных участков пути: а) от центральной точки ($x = 0$) до крайней ($x = A$); б) на первую половину этого участка (до $x = A/2$); в) на вторую половину этого участка. Время будем отсчитывать от момента прохождения центральной точки, т.е. будем использовать закон движения в форме синуса: $x = A \sin \omega t$ ($\omega = 2\pi/T$). В пункте а) надо решить уравнение $A = A \sin \omega t_1$, наименьший положительный корень которого $t_1 = \pi/2\omega$ приводит к очевидному ответу $t_1 = T/4$. В пункте б) получаем уравнение $A \sin \omega t_2 = A/2$, откуда находим $t_2 = T/12$, что в три раза меньше, чем t_1 . В случае в) получаем $t_3 = T/6 = 2t_2$ (при малом смещении x скорость больше, чем при большом).

► **Уравнение гармонических колебаний.** Из уравнений (1) и (2) видно, что ускорение точки при гармонических колебаниях изменяется со временем так же, как смещение, и в каждый момент времени они связаны соотношением

$$x'' = -\omega^2 x. \quad (5)$$

Это уравнение выполняется для любых гармонических колебаний, независимо от их природы, и называется *уравнением гармонических колебаний*. Для изучения колебаний конкретных физических систем важно, что выполняется и обратное утверждение: если какой-нибудь параметр физической системы подчиняется уравнению (5),

то он изменяется со временем по закону (1). (На математическом языке — функция (1) является общим решением уравнения (5).) Два свободных параметра (A и φ_0) в (1), не входящие в уравнение (5), определяются из начальных условий (см. Пример 1).

Перейдем к рассмотрению конкретных физических систем.

► **Собственные колебания.** Колебания, происходящие в системе в отсутствие внешних периодических сил, называют *собственными* колебаниями. Собственные колебания, происходящие без потерь энергии (в консервативной системе), называют *свободными*. Чтобы собственные колебания были возможны, сила, возникающая при смещении из положения равновесия, должна действовать в сторону точки равновесия (ее иногда называют *возвращающей* силой). Это значит, что свободные колебания происходят около положения *устойчивого* равновесия.

Пример 3. *Колебания груза на пружине.* Рассмотрим тело массой m , находящееся на гладкой горизонтальной поверхности и соединенное со стенкой пружиной жесткостью k (рис. 66). Ускорение сообщается телу силой упругости $F_x = -kx$. Поэтому второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$mx'' = -kx, \quad \text{или} \quad x'' = -\frac{k}{m}x. \quad (6)$$

Сравнивая с уравнением гармонических колебаний (5), видим, что груз на пружине совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{т.е.} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7)$$

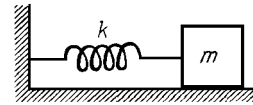


Рис. 66

Замечание. Если рассмотреть *вертикальные* колебания груза на пружине, то на первый взгляд уравнение движения груза (второй закон Ньютона) $my'' = -ky + mg$ не похоже на уравнение гармонических колебаний. Причина состоит в том, что в этом уравнении координата y отсчитывается не от положения равновесия, а от положения нерастянутой пружины. В положении равновесия сумма сил равна нулю: $ky_0 = mg$, а при небольшом смещении на x от этого положения сила тяжести не меняется, а сила упругости изменяется на $(-kx)$, т.е. второй закон Ньютона для координаты $x = y - y_0$ принимает вид $mx'' = -kx$.

Пример 4. Если поплавок массой m и площадью поперечного сечения S , плавающий в жидкости плотностью ρ , вывести из равновесия, он будет совершать гармонические колебания. В этом легко убедиться, заметив, что при изменении глубины погружения поплавок на небольшую величину x сила Архимеда изменяется на $(-\rho gSx)$, т.е. возникает возвращающая сила, равная силе упругости пружины жесткостью $k = \rho gS$. Поэтому (см. (7)) период собственных колебаний поплавок равен $T = 2\pi\sqrt{m/(\rho gS)}$.

Пример 5. *Математический маятник* — это материальная точка, подвешенная на нерастяжимой нити длиной l (рис. 67). Пусть

$x = l\alpha$ — длина дуги, пройденной точкой от положения равновесия. В этот момент проекция силы тяжести на касательное направление равна

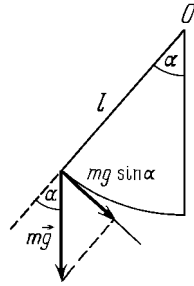


Рис. 67

$$F_x = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{x}{l}.$$

Если x мало по сравнению с l , то $\sin(x/l) \approx x/l$, и возвращающая сила оказывается равной силе упругости пружины жесткостью $k = mg/l$. Отсюда (см. (7)) $\omega = \sqrt{g/l}$ и период T малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

не зависит от массы m .

Рассмотренные примеры подводят к предположению, что собственные колебания, возникающие при малом отклонении тела

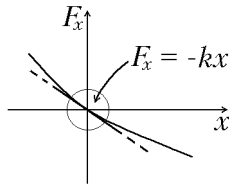


Рис. 68

от положения устойчивого равновесия, аналогичны колебаниям тела на некоторой воображаемой пружине, т.е. являются гармоническими. Действительно, любую возвращающую силу $F_x(x)$ (см. рис. 68) можно в малой окрестности точки $x = 0$ заменить отрезком прямой, касательной к графику $F_x(x)$, т.е. представить в виде $F_x = -kx$. По-

этому возвращающую силу при малом смещении x называют *квазиупругой* (т.е. почти упругой) силой, а k — *эффективной жесткостью* данной системы около положения (устойчивого) равновесия. Следовательно, *малые* колебания любой системы происходят по закону гармонических колебаний (1) с частотой (7). Именно в связи с «универсальностью» гармонических колебаний им уделяется столь большое внимание.

Отметим одно из замечательных свойств гармонических колебаний: их частота и период не зависят от амплитуды. Именно поэтому можно говорить о частоте малых колебаний как характеристике системы, не оговаривая, о какой амплитуде идет речь. К этому свойству так привыкли, что оно кажется вполне очевидным. Однако если рассмотреть малые колебания в системе, где возвращающая сила пропорциональна кубу смещения: $F_x = -\gamma x^3$, то период таких «мягких» колебаний окажется обратно пропорциональным амплитуде. (Такие колебания возникнут, если к середине длинной *нерастянутой* пружины, концы которой закреплены на гладкой горизонтальной плоскости, прикрепить грузик и сообщить ему небольшую горизонтальную скорость в перпендикулярном пружине направлении.) Убедимся в этом из соображений размерности. Период может зависеть только от γ/m и A . Так как γ/m имеет размерность $m^{-2}s^{-2}$, то размерность времени имеет только одна комбинация: $T \sim 1/(A\sqrt{\gamma/m})$.

С другой стороны, для гармонических колебаний коэффициент k/m имеет размерность s^{-2} , и амплитуда в ответ для периода ($T \sim 1/\sqrt{k/m}$) не входит.

► **Энергия гармонических колебаний.** Как мы видели, при малых отклонениях от положения равновесия возвращающая сила имеет вид $F = -kx$ и, следовательно, потенциальную энергию можно представить в виде $E_{\text{пот}} = kx^2/2$. (При исследовании колебаний

потенциальную энергию принято отсчитывать от положения равновесия $x = 0$. В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна.) Поэтому полная механическая энергия E системы, совершающей гармонические колебания, имеет вид

$$E = m \frac{v^2}{2} + k \frac{x^2}{2}.$$

Если силы трения пренебрежимо малы, то полная механическая энергия сохраняется. Поэтому полную механическую энергию можно вычислять в любой момент времени. Удобно рассмотреть момент, когда точка проходит положение равновесия ($x = 0$, $v = v_{\max}$), и момент, когда точка находится в крайнем положении ($x = A$, $v = 0$):

$$E = m \frac{v_{\max}^2}{2} = k \frac{A^2}{2},$$

где $v_{\max}$ — максимальная скорость (см. (3)). Потенциальная энергия изменяется со временем по закону $E_{\text{п}} = E \cos^2(\omega t + \varphi_0)$, а кинетическая — по закону $E_{\text{к}} = E \sin^2(\omega t + \varphi_0)$. Полная энергия гармонических колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Трение приводит к уменьшению энергии колебаний, т.е. к постепенному уменьшению их амплитуды.

Энергетический подход можно использовать и для вычисления частоты (периода) малых колебаний физических систем. Здесь действует следующее правило: если механическая энергия зависит от некоторого параметра x по закону

$$E = \frac{\varkappa x^2}{2} + \frac{\mu x'^2}{2},$$

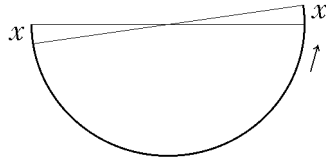
где x' — производная по времени, а $\varkappa$ и μ — некоторые константы, то параметр x будет изменяться по гармоническому закону (1) с частотой $\omega = \sqrt{\varkappa/\mu}$. Действительно, если взять производную по времени от обеих частей этого уравнения, то получим

$$0 = \varkappa x x' + \mu x' x''$$

(производная от полной энергии E равна нулю, так как энергия сохраняется). Сокращая на x' , приходим к уравнению гармонических колебаний.

Пример 6. Рассмотрим малые колебания проволоки, согнутой в виде полукруга радиусом R , которая с помощью тонких спиц подвешена на горизонтальной оси (рис. 69). (Ось проходит через центр окружности перпендикулярно плоскости кольца.) Обозначим за x линейное смещение всех точек проволоки (в том числе ее концов) при небольшом повороте из положения равновесия. Тогда кинетическая энергия проволоки будет равна $m x'^2/2$, где m —

масса проволоки. Для вычисления потенциальной энергии заметим, что вместо поворота всей проволоки можно переместить кусочек длиной x с одного ее конца на другой. Так как масса этого кусочка равна $\Delta m = x(m/l)$, где $l = \pi R$ — длина проволоки, а изменение его высоты равно x , то потенциальная энергия проволоки при смещении на x возрастает на $(m/l)xgx = mgx^2/l$. Получаем



$$E = \frac{2mg}{\pi R} \frac{x^2}{2} + m \frac{x'^2}{2},$$

Рис. 69

т.е. частота колебаний равна $\omega = \sqrt{2g/\pi R}$.

► **Вынужденные колебания.** Если к системе, способной совершать *свободные* гармонические колебания с частотой ω_0 , приложить внешнюю силу F , изменяющуюся по гармоническому закону $F = F_m \cos \omega t$, то через некоторое время в системе установятся *вынужденные колебания* с частотой вынуждающей силы ω . Амплитуда этих колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_m и при постоянной амплитуде зависит от частоты вынуждающей силы ω так, как показано на рис. 70. При приближении ω к частоте собственных колебаний ω_0 амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает. Это явление называют

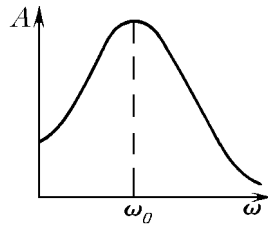


Рис. 70

резонансом. Чем меньше трение, тем больше амплитуда резонансных колебаний и тем острее пик на резонансной кривой.

В каждом цикле установившихся вынужденных колебаний вынуждающая сила совершает положительную работу, равную по величине работе силы трения. При резонансе вынуждающая сила все время направлена вдоль скорости, и по-

этому осуществляются самые благоприятные условия для совершения работы. Поэтому при резонансе устанавливается максимальная амплитуда колебаний.

Второй закон Ньютона для вынужденных колебаний имеет вид

$$mx'' = -kx - \alpha x' + F_m \cos \omega t$$

(в правой части стоят возвращающая сила, сила сопротивления воздуха и вынуждающая сила). Установившиеся колебания происходят с частотой ω , поэтому, как при любых гармонических колебаниях, амплитуда скорости равна ωA , а ускорение изменяется по тому же закону, что и перемещение: $x'' = -\omega^2 x$. Рассмотрим три случая. а) Малая частота ($\omega \rightarrow 0$). Скорость и ускорение малы (см. (3)), т.е. $x = (F_m/k) \cos \omega t$. Тело медленно смещается вслед за силой, оставаясь все время почти в равновесии. б) Резонанс. Так как $\omega = \omega_0$, то $mx'' = -m\omega_0^2 x = -kx$, т.е. движение происходит как бы под действием только возвращающей силы, а вынуждающая сила уравновешивается силой сопротивления. Значит, амплитуда скорости равна F_m/α , а амплитуда смещения равна $A = F_m/(\omega_0 \alpha)$. Чем меньше α , тем больше резонансная амплитуда. в) Большая частота ($\omega \rightarrow \infty$). Силой сопротивления и возвращающей силой можно пренебречь, т.е. колебания ускорения происходят с амплитудой F_m/m в фазе с вынуждающей силой, а колебания смещения — с амплитудой $F_m/(m\omega^2)$ в противофазе с вынуждающей силой. При увеличении частоты амплитуда уменьшается.

Явление резонанса можно часто наблюдать в окружающей жизни. Например, раскачивая качели с ребенком, мы толкаем их раз в период в сторону движения. Водители автомашин хорошо знают, что если при движении по бугристой дороге корпус начнет сильно раскачиваться на рессорах, надо изменить скорость — частота «подпрыгиваний» на буграх изменится, и корпус выйдет из резонанса.

Автоколебания — это незатухающие собственные колебания, поддерживающиеся за счет периодической (в каждом цикле) подкачки энергии от какого-либо источника. Примером таких колебаний служат колебания маятника часов. Эти колебания поддерживаются за счет потенциальной энергии, запасенной в гире или в сжатой пружине.

► **Волны.** В упругих средах колебания, возникающие в результате внешнего воздействия в одном месте, распространяются от точки к точке. Такие распространяющиеся колебания называют *упругими волнами*. Чтобы проиллюстрировать, почему возникают упругие волны, представим атомы в кристалле твердыми шариками, соединенными между собой пружинами — межмолекулярными силами. Ясно, что если привести один из шариков в движение, то его колебания будут передаваться через пружины к соседним шарикам. Различают *продольные* волны, в которых колебания частиц происходят вдоль линии распространения волны, и *поперечные* волны, в которых частицы колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению волны. Скорость распространения упругих волн не зависит от частоты и амплитуды колебаний частиц, хотя скорости распространения продольных и поперечных волн различны.

► **Уравнение бегущей волны.** Обозначим смещение частиц упругой среды y , а координату, вдоль которой распространяется волна, — x . Тогда колебания частицы при прохождении волны описываются *уравнением бегущей волны*:

$$y(t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \quad (8)$$

где A — амплитуда, ω — циклическая частота, t — время, а v — *скорость распространения волны*. Из уравнения видно, что в точку, удаленную от источника колебаний на расстояние x , волна приходит с задержкой x/v . Зафиксировав время $t = \text{const}$, получаем распределение колебаний точек в пространстве, т.е. мгновенный «снимок» волны: $y = A \cos(\varphi - \omega x/v)$. Видно, что при изменении x на величину $\lambda = 2\pi v/\omega$ аргумент косинуса меняется на 2π . Это означает, что при смещении на λ вдоль оси x картина распределения колебаний полностью повторяется. Следовательно, λ является

периодом колебаний упругой среды, рассматриваемых как функция координаты x . Величина λ называется *длиной волны*. Она связана с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$ и скоростью v формулой:

$$\lambda = vT. \quad (9)$$

Вопрос. Формулу (9) можно прочесть так: за период фронт волны проходит расстояние, равное длине волны. Имеет ли смысл такое прочтение этой формулы?

Ответ. Да, имеет. Через время $t = T$ данная точка совершит полное колебание и приступит к его повторению, а точка на расстоянии vT , которой как раз достигнет волна, начнет совершать первое колебание. Значит, эти точки будут колебаться в фазе.

Как видно из уравнения бегущей волны (8), чем дальше отстоит точка от источника колебаний, тем больше отстают по фазе колебания в этой точке. *Разность фаз между колебаниями двух точек*, расстояние между которыми Δx , равна

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{v}\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}.$$

► **Звук.** В жидкостях и газах могут возникать лишь продольные упругие волны. Такие волны называют *звуковыми*. Скорость звука не зависит от амплитуды колебаний, но различна для разных веществ: *скорость звука* в воздухе вблизи поверхности Земли примерно 330 м/с, в воде — около 1500 м/с.

Человеческое ухо воспринимает звуковые колебания с частотой от 20 Гц до 20 кГц. Колебания с частотой меньше 20 Гц называют *инфразвуком*, а с частотой более 20 кГц — *ультразвуком*. Увеличение частоты звуковых колебаний в слышимом диапазоне частот воспринимается человеком как увеличение *высоты тона*. Увеличение амплитуды звуковых колебаний воспринимается человеком как повышение *громкости звука*.

Ультразвуковые волны, в отличие от звуковых, хорошо распространяются в воде. Поэтому отраженный ультразвук используют для обследования дна водоемов (эхолокация), а также для исследования внутренних органов человека. Некоторые животные (дельфины, летучие мыши) используют ультразвук для общения с сородичами и для ориентировки (ультразвуковая локация).

§ 2. Электромагнитные колебания и волны

► **Колебательный контур.** Рассмотрим *колебательный контур*, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым сопротивлением обмотки и соединяющих проводов (рис. 71). Выберем направление положительного обхода контура и условимся заряд на нижней пластине обозначать q , а на верхней $-q$. В

этом случае ток в цепи и заряд на конденсаторе будут в каждый момент времени связаны соотношением $I(t) = q'(t)$, а разность потенциалов U между точками B и A (напряжение на конденсаторе) будет выражаться через заряд конденсатора: $U = \varphi_B - \varphi_A = q(t)/C$. В катушке возникает ЭДС самоиндукции, равная $\mathcal{E}(t) = -LI'(t)$. Так как сопротивление катушки равно нулю, то электростатические и сторонние силы внутри катушки компенсируют друг друга (см. Замечание на стр. 93), т.е. $\varphi_A - \varphi_B = -\mathcal{E}$. Получаем $\mathcal{E} = \varphi_B - \varphi_A$, или

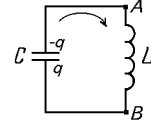


Рис. 71

$$Lq''(t) = -\frac{1}{C}q(t). \quad (10)$$

Заметим, что это уравнение точно такое же, как и уравнение колебаний груза на пружине (6), но в нем координате $x(t)$ соответствует заряд конденсатора $q(t)$, массе m — индуктивность катушки L , а жесткости k пружины — величина, обратная емкости конденсатора, $1/C$. Из аналогии между уравнением колебательного контура и уравнением колебаний груза на пружине следует, что решение уравнения (10) имеет вид гармонических колебаний $q(t) = q_m \cos \omega t$, где амплитуда колебаний q_m представляет собой максимальный заряд конденсатора. (За начало отсчета времени принят момент начала разрядки конденсатора.) Из аналогии между уравнениями (6) и (10) также следует, что *период собственных колебаний контура* T равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

(формула Томсона).

► **Энергия контура.** Энергия колебательного контура W складывается из энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке:

$$W = \frac{CU^2(t)}{2} + \frac{LI^2(t)}{2}.$$

Поскольку сопротивление проводов пренебрежимо мало, энергия колебательного контура E сохраняется. Напряжение пропорционально заряду конденсатора, поэтому $U(t) = U_m \cos \omega t$, где $U_m = q_m/C$ — максимальное напряжение. Ток $I(t) = q'(t)$, поэтому $I(t) = -\omega q_m \sin \omega t$. Видно, что максимальному напряжению U_m соответствует нулевой ток, а максимальному току $I_m = \omega q_m$ — нулевые напряжение и заряд конденсатора. Поэтому

$$W = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

► **Вынужденные электрические колебания.** *Вынужденные колебания* в электрической цепи возникают в том случае, если в цепи действует периодическая ЭДС. Переменная ЭДС создается *генератором переменного тока*, действие которого основано на явлении электромагнитной индукции. При вращении рамки из нескольких витков в постоянном магнитном поле $\vec{B}$ поток через рамку меняется по закону

$$\Phi(t) = NBS \cos \alpha = NBS \cos \omega t,$$

где S — площадь рамки, N — число витков (рис. 72); угол α между нормалью к рамке и вектором индукции $\vec{B}$ при равномерном вращении меняется по закону $\alpha = \omega t$. По закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = \omega NBS \sin \omega t,$$

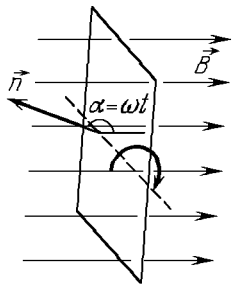


Рис. 72

т.е. ЭДС меняется по гармоническому закону с амплитудой $\mathcal{E}_m = \omega NBS = \omega \Phi_m$. В реальной конструкции генератора оказывается более удобным вращать постоянный магнит или катушку с током, а индуцируемый переменный ток (он может быть большим) снимать с неподвижных катушек.

Если генератор переменного тока создает на участке цепи напряжение $u(t) = U_m \cos \omega t$, то в общем случае сила тока меняется по закону

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где φ — сдвиг фаз между током и напряжением.

► **Активное сопротивление в цепи переменного тока.** Рассмотрим участок цепи, состоящий только из *активного* сопротивления R (его называют активным, потому что вся работа внешней цепи выделяется на нем в виде тепла). По закону Ома $i(t) = u(t)/R$, т.е. $I_m = U_m/R$, и колебания тока совпадают по фазе с колебаниями напряжения ($\varphi = 0$). Мгновенная *мощность*, поглощаемая участком цепи, равна

$$P(t) = i^2 R = I_m^2 R \cos^2(\omega t) = \frac{I_m^2 R}{2} (1 + \cos 2\omega t).$$

Средняя (за период или несколько периодов) мощность составляет

$$P_{\text{ср}} = (i^2)_{\text{ср}} R = \frac{I_m^2}{2} R,$$

так как среднее значение $\cos(2\omega t)$ за период равно нулю. *Действующим значением переменного тока* называют такой постоянный

ток, тепловая мощность которого на активном сопротивлении равна средней тепловой мощности переменного тока:

$$I_d = \sqrt{(i^2)_{\text{cp}}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Соответственно, действующее значение напряжения равно $U_m/\sqrt{2}$. Получаем

$$P_{\text{cp}} = I_d^2 R = U_d^2 / R = I_d U_d. \quad (11)$$

► **Мощность переменного тока.** В общем случае, когда $\varphi \neq 0$, потребляемая мощность равна

$$P = iu = \frac{I_m U_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)],$$

т.е. в течение одной части периода участок получает энергию, а в течение другой части — отдает. Средняя мощность равна

$$P_{\text{cp}} = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = I_d U_d \cos \varphi.$$

► **Емкость в цепи переменного тока.** В этом случае $q(t) = Cu(t) = CU_m \cos \omega t$, т.е.

$$i = q' = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \pi/2),$$

т.е. колебания силы тока опережают по фазе колебания напряжения на $\pi/2$ ($\varphi = \pi/2$). Амплитуда силы тока пропорциональна амплитуде напряжения: $I_m = \omega C U_m$, поэтому величину $X_C = 1/\omega C$ называют *емкостным сопротивлением*.

► **Индуктивность в цепи переменного тока.** Пусть $i = I_m \cos \omega t$. Тогда

$$u = -\mathcal{E} = Li' = \omega L I_m \cos(\omega t + \pi/2),$$

т.е. колебания силы тока отстают по фазе от колебаний напряжения ($\varphi = -\pi/2$). Амплитуды силы тока и напряжения связаны соотношением $U_m = \omega L I_m$. Величину $X_L = \omega L$ называют *индуктивным сопротивлением*. Как для емкости, так и для индуктивности средняя мощность на участке цепи равна нулю ($\varphi = \pm\pi/2$). В течение части периода энергия запасается в виде энергии электрического или магнитного поля, а затем полностью отдается обратно.

► **Резонанс в электрической цепи.** Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления, емкости и индуктивности (рис. 73). Сдвиг

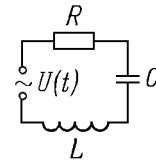


Рис. 73

фаз и амплитуда колебаний силы тока зависят от частоты ω , причем зависимость носит резонансный характер (рис. 70). Максимум резонансной кривой соответствует собственной частоте колебательного контура ($\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$). При этой частоте $X_C = X_L$, т.е. колебания напряжения на индуктивности и емкости имеют одинаковую амплитуду, но происходят в противофазе. Это значит, что напряжение на всем участке равно напряжению на активном сопротивлении, т.е. полное сопротивление участка становится чисто активным ($\varphi = 0$).

► **Трансформаторы.** Переменный ток удобен тем, что он позволяет производить преобразования амплитуды тока и напряжения с

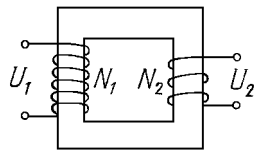


Рис. 74

малыми потерями энергии. Для этой цели используются *трансформаторы*, действие которых основано на явлении электромагнитной индукции. Трансформатор состоит из первичной обмотки (N_1 витков) и вторичной обмотки (N_2 витков), намотанных на замкнутый железный сердечник (рис. 74). Сердечник концентрирует линии индукции магнитного поля, т.е. все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком. Значит, отношение ЭДС, создаваемых в обмотках, равно отношению числа витков:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

При холостом режиме работы трансформатора вторичная обмотка разомкнута, т.е. $i_2 = 0$, и $U_2 = \mathcal{E}_2$, потому что электростатическое поле должно компенсировать действие сторонних сил. Такое же соотношение ($U_1 = \mathcal{E}_1$) можно записать и для первичной обмотки, но только в том случае, если ее активное сопротивление пренебрежимо мало. Получаем, что амплитуды напряжений в обмотках связаны соотношением:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = K,$$

где K — коэффициент трансформации. Если $K < 1$, то трансформатор называют повышающим, если $K > 1$ — понижающим. Если ко вторичной обмотке подсоединена нагрузка (рабочий режим), то происходит передача энергии. Для трансформатора с идеальными обмотками $P_1 = I_1 U_1$, $P_2 = I_2 U_2$, т.е. при отсутствии потерь энергии $I_1 U_1 = I_2 U_2$ откуда следует, что при увеличении напряжения во столько же раз уменьшается сила тока. Если трансформатор не идеальный, то его КПД равен $\eta = (U_2 I_2)/(U_1 I_1)$.

Преобразование амплитуд тока и напряжения необходимо для

передачи электрической энергии по проводам с минимальными потерями. Потери энергии на проводах определяются законом Джоуля—Ленца: $P = I_d^2 R$ (см. (11)), поэтому после генератора ставят повышающий трансформатор, увеличивающий амплитуду напряжения и уменьшающий амплитуду силы тока. От генератора к потребителю идет высоковольтная линия, в конце которой стоит понижающий трансформатор, преобразующий амплитуду напряжения до требуемого потребителю значения.

► **Электромагнитные волны.** Электромагнитная энергия может распространяться не только по проводам, но и в пустом пространстве, в виде *электромагнитной волны*. Существование электромагнитных волн было предсказано Максвеллом на основе открытых им уравнений электромагнитного поля. При выводе уравнений Максвелл сделал предположение, симметричное закону электромагнитной индукции: не только переменное магнитное поле порождает *вихревое электрическое поле*, но и переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле, т.е. действует как ток (Максвелл использовал термин «ток смещения»). Порождая друг друга, магнитное и электрическое поля захватывают все новые области пространства, распространяясь в виде электромагнитной волны.

Свойства электромагнитных волн.

1. Электромагнитная волна в вакууме распространяется со скоростью света c , независимо от частоты колебаний.

2. Электромагнитная волна *поперечна*. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны к направлению распространения волны и друг к другу.

3. Амплитуды колебаний $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в волне связаны соотношением $E = cB$. Поэтому сила, действующая на заряженную частицу со стороны электрического поля, в c/v раз больше, чем со стороны магнитного поля (v — скорость частицы). Определяя *плоскость поляризации волны*, указывают плоскость колебаний вектора $\vec{E}$.

► **Излучение электромагнитных волн.** Электромагнитные волны были экспериментально обнаружены и исследованы Герцем. Для излучения волн Герц использовал *вибратор*, который, как и колебательный контур, обладает емкостью и индуктивностью, но заряды в нем движутся вдоль одной прямой (*открытый колебательный контур*).

Свойства процесса излучения.

1. Равномерно движущийся заряд волн не излучает.

2. *Мощность излучения волн* зарядом, движущимся с ускорением, пропорциональна квадрату ускорения.

3. При излучении волн колебательной системой (вибратор, антенна) мощность излучения пропорциональна четвертой степени

частоты (так как ускорение пропорционально квадрату частоты — см. (3)).

► **Радиосвязь.** *Радиосвязью* называется передача информации без проводов, с помощью электромагнитных волн. Для осуществления радиосвязи необходимо иметь излучатель достаточно высокой частоты (иначе мощность излучения будет мала), антенну и приемник. Приходящая волна вызывает в антенне слабые колебания высокой частоты, которые поступают на приемник и управляют происходящими там процессами.

Радиосвязь была впервые осуществлена Поповым в 1895 г. В качестве *приемника* он использовал прибор под названием *когерер*. Цепь прибора содержала ванночку с металлическими опилками, в которую были опущены два электрода. Вызванные волной высокочастотные колебания приводили к свариванию опилок, их сопротивление резко падало, что приводило к замыканию цепи. В цепь был включен звонок с молоточком; молоточек ударял то по звонку, то по когереру, встряхивая опилки и приводя прибор в исходное состояние. По окончании приема волн звонок умолкал, а прибор был снова готов к работе.

Для записи, передачи и воспроизведения звуковых колебаний (*радиотелефонная связь*) используют *модуляцию* колебаний высокой частоты (ее называют несущей) низкой (звуковой) частотой. (Непосредственно излучать электромагнитные волны звуковой частоты не удастся — слишком мала мощность излучения.) Поступая на приемник, модулированный сигнал вызывает колебания большой амплитуды в колебательном контуре, настроенном на несущую частоту (т.е. его собственная частота равна частоте той волны, которую хотят усилить). Амплитуда колебаний в контуре оказывается также модулированной. Чтобы «очистить» сигнал от несущей частоты, его сначала выпрямляют (детектируют) с помощью диода, а потом сглаживают с помощью фильтра. Выделенный таким образом сигнал усиливается и поступает на динамик, вызывая звуковые колебания мембраны.

Глава 5. Оптика и теория относительности

Оптика занимается изучением электромагнитного излучения оптического (светового) диапазона (см. стр. 132), явлений, возникающих при его распространении и взаимодействии с веществом.

§ 1. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика отвлекается от волнового характера и от поляризации светового излучения, оперируя понятиями *свето-*

вых лучей, указывающих направление распространения световой энергии, и узких световых пучков, образованных этими лучами. Основные законы геометрической оптики: независимости световых пучков, прямолинейного распространения, отражения и преломления света. Законы геометрической оптики верны до тех пор, пока можно пренебречь явлениями интерференции и дифракции, которые мы рассмотрим в следующем параграфе.

Принцип независимости световых пучков: энергия в каждом пучке распространяется независимо от других пучков; освещенность поверхности равна сумме освещенностей, создаваемых отдельными пучками.

Закон прямолинейного распространения света утверждает, что в однородной среде или в вакууме свет распространяется прямолинейно, т.е. луч света представляет собой прямую линию.

► **Изображение.** Важное значение в геометрической оптике имеет понятие *изображения*: изображением точечного источника называют точку, в которой пересекаются лучи от этого источника после прохождения ими оптической системы. Если прошедшие лучи образуют сходящийся пучок, то изображение называют *действительным*; если же лучи расходятся из воображаемой точки, лежащей за оптической системой (по отношению к наблюдателю), то изображение называют *мнимым*.

► **Отражение и преломление.** При падении света на границу раздела двух сред часть света (а иногда весь свет) отражается обратно в первую среду. Если вторая среда прозрачна, то часть света проходит во вторую среду, изменяя направление луча, т.е. происходит преломление света (рис. 75). Угол α_1 между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным в точке падения, называют *углом падения* (плоскость, проведенную через эти две прямые, называют *плоскостью падения*). Точно так же определяют *угол отражения* γ и *угол преломления* α_2 .

► **Закон отражения света.** Закон отражения света утверждает, что отраженный луч лежит в плоскости падения, и угол отражения равен углу падения ($\gamma = \alpha_1$). Опираясь на этот закон, можно убедиться в том, что плоская отражающая поверхность (т.е. плоское зеркало) формирует мнимое изображение светящейся точки, расположенное симметрично самой точке относительно зеркала (рис. 76). *Изображение предмета в плоском зеркале* равно по размерам самому предмету.

Вопрос. Луч падает на зеркало. С какой угловой скоростью будет поворачи-

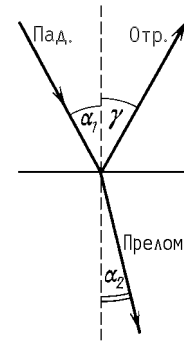


Рис. 75

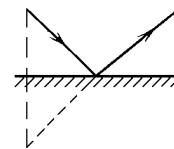


Рис. 76

ваться отраженный луч, если зеркало начать поворачивать с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной к плоскости падения?

Ответ. С угловой скоростью 2ω . Падающий луч неподвижен, перпендикуляр к зеркалу поворачивается со скоростью ω , значит, с такой же скоростью изменяются как угол падения, так и угол отражения. Сумма этих двух углов, которая есть угол между падающим и отраженным лучами, изменяется со скоростью 2ω .

► **Закон преломления света.** Закон преломления света утверждает, что преломленный луч лежит в плоскости падения, и отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина, постоянная для данных двух сред; ее называют *относительным показателем преломления* второй среды относительно первой:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n.$$

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютного показателя преломления второй среды к абсолютному показателю преломления первой среды $n = n_2/n_1$, откуда получаем

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

где абсолютный показатель преломления равен, по определению, показателю преломления среды относительно вакуума. Среду с бóльшим показателем преломления называют оптически более плотной.

Абсолютный показатель преломления (или просто показатель преломления) среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в среде:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Абсолютный показатель преломления любой среды больше единицы; он зависит как от состояния вещества, так и от длины волны падающего света (для красного света он меньше, чем для фиолетового).

Пример 1. Хорошо известно, что все предметы на дне неглубокого водоема при рассматривании сверху через прозрачную незамутненную воду кажутся ближе, чем

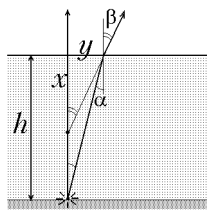


Рис. 77

на самом деле. Покажем, что *плоская преломляющая поверхность* формирует мнимое изображение предмета. Рассмотрим источник, находящийся в воде на глубине h , и найдем точку пересечения двух лучей: одного, идущего вдоль перпендикуляра к поверхности, и второго, идущего под малым углом α к этому перпендикуляру (рис. 77), после их преломления. Угол преломления для второго луча β найдем из закона преломления: $\sin \beta = n \sin \alpha$, или, учитывая малость углов, $\beta = n\alpha$. Глубину x , на которой пересекаются лучи, свяжем с глубиной h , выразив из двух разных треугольников расстояние y между точками выхода лучей из воды: $htg\alpha = xtgb$, или, опять же с учетом малости углов, $x = h\alpha/\beta = h/n$. Так

как положение точки пересечения оказался не зависящим от α , то в этой точке формируется изображение источника. Показатель преломления воды равен $n \approx 1,3$, т.е. кажущаяся глубина водоема примерно на 25% меньше действительной. Если, наоборот, рассматривать из-под воды предмет, находящийся в воздухе, то он будет казаться дальше, чем на самом деле (убедитесь в этом сами). Отметим, что (в отличие от изображения в зеркале) изображение формируется только *узким пучком лучей*, идущих под малыми углами (при рассматривании глазом это условие, конечно же, выполняется).

Пример 2. Закон преломления света, записанный в форме

$$n \sin \alpha = \text{const}$$

(см. (1)), позволяет дать качественное объяснение появлению *миражей* над раскаленной поверхностью дороги или пустыни. Показатель преломления воздуха зависит от его плотности — где больше плотность, там больше и показатель преломления. Так как давление воздуха постоянно, то его плотность около раскаленной поверхности меньше, чем в верхних слоях (вспомните уравнение состояния газа $p = \rho RT/M$). Предположим, что луч света падает полого (т.е. под углом почти 90°) на поверхность. По мере приближения к поверхности n уменьшается, α возрастает, и при некотором n направление луча станет горизонтальным, после чего он начнет удаляться от поверхности. Для наблюдателя такое поведение лучей будет неотличимо от обычного отражения от воображаемой водной поверхности.

► **Принцип Гюйгенса.** Законы отражения и преломления могут быть выведены из *принципа Гюйгенса*, справедливого для волн любой природы: а) каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн; б) чтобы найти новый фронт волны, надо построить огибающую вторичных волн. Рисунки 78 а,б поясняют вывод законов отражения и преломления. AC — фронт

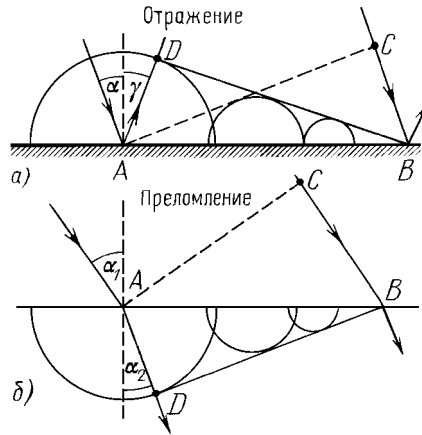


Рис. 78

падающей волны, BD — фронт прошедшей (отраженной или преломленной) волны; в случае отражения $CB = AD$, и $\gamma = \alpha$; в случае преломления $CB = v_1 \Delta t$, $AD = v_2 \Delta t = (v_1/n) \Delta t$, т.е. $\sin \alpha_1$ в n раз больше, чем $\sin \alpha_2$ (закон преломления).

► **Полное внутреннее отражение.** Пусть $n = n_2/n_1 > 1$. Тогда $\sin \alpha_2 = (\sin \alpha_1)/n$ изменяется в пределах от 0 (при $\alpha_1 = 0$ — нормальное падение луча) до $1/n$ (при $\alpha_1 = 90^\circ$ — скользящий луч). Рассмотрим теперь лучи, падающие на границу раздела из среды 2 (рис. 79). Если $0 \leq \sin \alpha_2 \leq 1/n$ (луч 1), то ему соответствует какой-то преломленный луч в среде 1 (и слабый отраженный

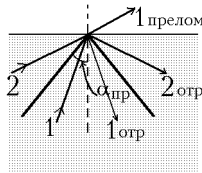


Рис. 79

луч в среде 2); при $\sin \alpha_2 = 1/n$ преломленный луч выходит под максимально возможным углом 90° ($\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 = 1$). Если же $\sin \alpha_2 > 1/n$ (луч 2), то преломленный луч отсутствует: происходит *полное отражение* луча от границы раздела. Итак, полное отражение происходит при падении луча из оптически более плотной среды под углом, большим

предельного угла полного отражения ($\alpha > \alpha_{\text{пр}}$), определяемого условием:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n}$$

($n = n_2/n_1 > 1$ — относительный показатель преломления).

Пример 3. В поле зрения водолаза, который с глубины h рассматривает плоскую поверхность воды, будет светлый круг радиусом $R = h \tan \alpha_{\text{пр}}$ и зеркальная поверхность вне этого круга, в которой он будет видеть отраженными удаленные участки дна (рис. 80). Светлый круг возникает потому, что световые лучи,

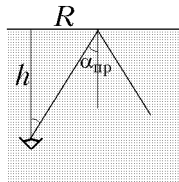


Рис. 80

падающие из воздуха на точку поверхности воды под всевозможными углами, в воде распространяются внутри конуса с углом полураствора $\alpha_{\text{пр}}$. Изображение близких участков дна, отраженных внутренней частью круга, будет для водолаза сильно ослабленным, так как большая часть световой энергии выйдет наружу (угол падения меньше $\alpha_{\text{пр}}$). Кроме того, это слабое отражение будет теряться на фоне светового потока, идущего к водолазу снаружи. Наоборот, удаленные участки дна, отраженные поверхностью вне круга, будут видны водолазу отчетливо, как в зеркале, так как при отражении

выполняется условие полного внутреннего отражения (угол падения больше $\alpha_{\text{пр}}$).

Явление полного отражения объясняет использование прямоугольной *призмы* для поворота лучей на 90° (рис. 81 а), на 180° (рис. 81 б) и для изменения порядка лучей (рис. 81 в). Для стекла $n = 1,5$, и предельный угол полного отражения меньше 45° .

Если лучи света не испытывают полного отражения на внутренней поверхности призмы (рис. 81 г), то они испытывают отклонение на угол θ в направлении от вершины; угол θ зависит от показателя преломления n (чем больше n , тем больше θ).

► **Линзы.** Линзой называют прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Мы будем рассматривать только *тонкую линзу*, толщина которой мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. Прямую AA_1 , проведенную через центры сферических поверхностей, называют *главной оптической*

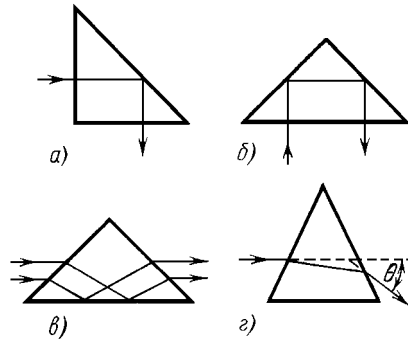


Рис. 81

осью линзы (рис. 82); пересечение этой оси с тонкой линзой рассматривают как одну точку и называют *оптическим центром линзы*. Любая прямая, проведенная через оптический центр под углом к главной оси, называется *побочной оптической осью*.

Возле оптического центра поверхности линзы параллельны друг другу, и любой луч, проходя через это место линзы, не испытывает отклонения. Луч же, прошедший через любое другое место линзы, изменяет свое направление. Главное свойство линзы — то, что она создает изображение источников света. Более точно — лучи, испущенные точечным источником под малыми углами к главной оптической оси, после преломления в линзе собираются в одну точку. Изображение создается любой частью линзы.

Рассмотрим пучок лучей, падающих на линзу параллельно главной оптической оси. Если оптический центр находится в самом толстом месте линзы (рис. 82 а), то лучи отклоняются в сторону главной оси и собираются в точку на этой оси. Такую линзу

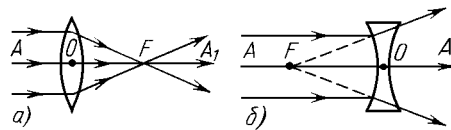


Рис. 82

называют *собирающей*, а точку пересечения F называют *главным фокусом линзы*. Если же оптический центр находится, наоборот, в самом тонком месте линзы (рис. 82 б), то преломленные лучи расходятся от главной оптической оси. Такую линзу называют *рассеивающей*, а точку пересечения преломленных лучей, точнее, их продолжений назад, за линзу, также называют *главным фокусом* (иногда говорят — мнимый фокус). Другой главный фокус расположен по другую сторону от линзы на таком же расстоянии от нее (если среда с двух сторон от линзы одна и та же). Расстояние от фокуса до линзы называют *фокусным расстоянием* и обозначают

буквой F . Величину, обратную фокусному расстоянию, называют *оптической силой линзы*: $D = 1/F$. Если F выразить в метрах, то D окажется выраженной в *диоптриях* (дптр). Для собирающей линзы оптическая сила линзы положительна, для рассеивающей — отрицательна.

Пучок параллельных лучей, падающих под малым углом к главной оптической оси, собирается после преломления в точке C_1 , находящейся в *фокальной плоскости линзы*, т.е. в плоскости, проведенной через главный фокус (для собирающей линзы — рис. 83 а, для рассеивающей — рис. 83 б) перпендикулярно к главной оси. Найти эту точку можно, выбрав из пучка луч CO , проходящий без преломления через оптический центр линзы, и построив его пересечение с фокальной плоскостью.

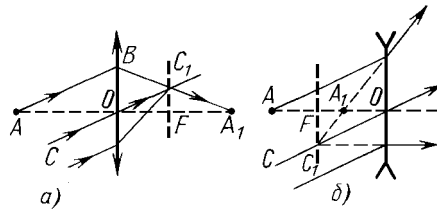


Рис. 83

► **Построение изображений.** Чтобы *построить изображение точки*, лежащей в стороне от оптической оси, можно использовать любые два из трех «удобных» лучей (рис. 84), ход которых после преломления известен: а) луч, проходящий через оптический центр линзы, б) луч, падающий параллельно главной оси, в) луч, проходящий через фокус линзы, который пойдет после преломления параллельно главной оси (это следует из обратимости лучей).

Чтобы построить изображение точки A , лежащей на главной оси, выбирают произвольный луч AB и рассматривают его совместно с дополнительным лучом CO , проведенным параллельно лучу AB через оптический центр линзы (см. рис. 83). После преломления эти лучи пересекаются в точке C_1 , лежащей в фокальной плоскости, что позволяет получить изображение A_1 точки A .

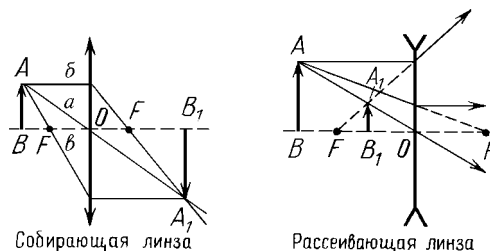


Рис. 84

► **Формула линзы.** Для аналитических расчетов используют *формулу линзы*, связывающую между собой расстояние от источника до линзы d и расстояние от изображения до линзы f :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (2)$$

Как уже отмечалось, величина F выбирается положительной в случае собирающей линзы (действительный фокус) и отрицательной в случае рассеивающей линзы (мнимый фокус). Аналогично, $f > 0$ в случае *действительного изображения* и $f < 0$ в случае *мнимого изображения*. Величина d тоже может быть отрицательной, что соответствует «мнимому источнику», т.е. падению на линзу сходящегося пучка лучей, пересекающихся за линзой.

► **Увеличение линзы.** *Увеличением* линзы Γ называют отношение линейных размеров изображения к линейным размерам предмета. Из подобия треугольников ABO и A_1B_1O (см. рис. 84) следует, что для поперечных размеров увеличение дается выражением

$$\Gamma = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \left| \frac{f}{d} \right|. \quad (3)$$

Из формулы линзы (2) с учетом (3) следует, что в случае действительного предмета ($d > 0$) возможны следующие случаи.

С л у ч а й 1. Рассеивающая линза всегда дает мнимое и уменьшенное ($\Gamma < 1$) изображение предмета (очки для близоруких).

С л у ч а й 2. Собирающая линза формирует мнимое изображение предмета в том случае, если $d < F$; однако в отличие от рассеивающей линзы, изображение получается увеличенным ($\Gamma > 1$). Этот случай реализуется при использовании *лупы*.

С л у ч а й 3. Если предмет расположен за фокусом ($d > F$), то изображение получается действительным; если $d < 2F$, то изображение на экране получается увеличенным (*проекторный аппарат*); в случае $d > 2F$ формируется уменьшенное изображение предмета (*фотоаппарат*).

§ 2. Основы волновой оптики

► **Дисперсия.** Измерения скорости света в различных прозрачных средах показали, что она всегда меньше скорости света в вакууме. Кроме того, в отличие от скорости в вакууме, скорость распространения электромагнитных волн в веществе зависит от длины волны; это явление называют *дисперсией*. Для световых волн длина волны связана с цветом, а скорость волны — с показателем преломления; поэтому дисперсия света проявляется в зависимости

показателя преломления от цвета. Впервые это явление исследовал Ньютон; пропустив узкий пучок белого света через призму, он обнаружил, что пучок развернулся в полоску со всеми цветами: от фиолетового (наибольшее преломление) до красного. Белый свет представляет собой смесь световых волн всех цветов; окраска предметов определяется не излучением соответствующих волн самими предметами (при комнатной температуре излучение световых волн ничтожно мало), а тем, что освещенное белым светом тело по-разному поглощает свет различной частоты.

Отметим важное свойство монохроматической (имеющей определенную частоту ν) световой волны: при переходе из вакуума в среду частота ν не меняется, а длина волны $\lambda = v/\nu$, как и скорость волны, уменьшается в n раз.

► **Спектральный анализ.** Важную информацию о внутреннем строении вещества можно получить, исследуя спектральный состав излучаемых им электромагнитных волн. Спектры веществ условно делят на три типа: твердые и жидкие вещества имеют непрерывные (*сплошные*) спектры, разреженные молекулярные газы — *полосатые* спектры и разреженные атомные газы — *линейчатые* спектры. Длины волн линейчатого спектра какого-либо вещества зависят только от свойств атомов этого вещества, но не зависят от способа возбуждения свечения атомов. Спектральный анализ — определение химического состава вещества по его спектру; для этого спектральные линии исследуемого вещества сравнивают с таблицами спектров атомов.

► **Шкала электромагнитных волн.** Шкала электромагнитных волн условно делится на следующие области (по длине волн): а) низкочастотное излучение, б) радиоволны ($0,05 \text{ м} \div 10^5 \text{ м}$), в) оптический диапазон: *инфракрасные лучи* ($770 \text{ нм} \div 0,05 \text{ м}$), видимый свет ($380 \text{ нм} \div 770 \text{ нм}$), *ультрафиолетовые лучи* ($10 \text{ нм} \div 380 \text{ нм}$), г) рентгеновские лучи ($0,01 \text{ нм} \div 100 \text{ нм}$) и д) γ -излучение ($< 0,1 \text{ нм}$). Качественное различие между разными участками шкалы состоит в способах возбуждения и регистрации волн; кроме того, при увеличении частоты (особенно при переходе к рентгеновским лучам и γ -излучению) все более отчетливо проявляются корпускулярные свойства излучения.

► **Интерференция света.** Наложение двух (или нескольких) волн, при котором образуется устойчивое перераспределение в пространстве энергии результирующих колебаний, называют *интерференцией*. Это возможно только при условии, что источники волн являются *когерентными*, т.е. имеют одинаковую частоту и постоянную разность фаз. Сами волны тоже называют когерентными.

При сложении двух когерентных волн амплитуда в данной точке пространства будет максимальной, если колебания происходят синхронно, т.е. разность их фаз равна нулю или целому кратному 2π : $\Delta\psi = 2m\pi$. Если колебания происходят в противофазе, т.е. $\Delta\psi = (2m + 1)\pi$, то результирующая амплитуда будет минимальной. Фаза волны ψ в данной точке пространства определяется тем, сколько длин волн укладывается на пути света от источника к данной точке: на каждой длине волны запаздывание по фазе по отношению к источнику увеличивается на 2π (см. стр. 118).

Если распространение световой волны от источника к точке наблюдения происходит в среде с показателем преломления n , то для подсчета отставания по фазе вводят *оптическую длину пути*, равную $l_{\text{опт}} = nl$, где l — расстояние, которое проходит свет в среде. Отставание по фазе на этом участке выражается через отношение $l_{\text{опт}}$ к длине волны λ_0 данного света в вакууме: $\Delta\psi = 2\pi l/\lambda = 2\pi nl/\lambda_0 = 2\pi l_{\text{опт}}/\lambda_0$. Если свет к точке наблюдения проходит участки с разными показателями преломления, то надо вычислить общую оптическую длину пути.

Два независимых источника света не могут создать интерференционную картину. Дело в том, что исходящий от них свет состоит из множества волн, испущенных различными атомами в случайные моменты времени (исключение составляют лазеры). Пропустив свет через фильтр, можно обеспечить примерное равенство частот (остальные частоты фильтр поглощает), но постоянную разность фаз мы не получим. Поэтому для наблюдения оптической интерференции обеспечивают наложение двух волн, испущенных одним источником света, но пришедших к месту интерференции различными путями. Если разность оптических длин пути этих волн Δ (ее называют *оптической разностью хода*) равна целому кратному λ_0 , то в этой точке будет максимум интерференции (условие максимума $\Delta = m\lambda_0$); условие минимума интерференции имеет вид $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$.

► **Интерференция в тонких пленках.** Пример — интерференция волн, отраженных от двух поверхностей *тонкой пленки* или тонкого воздушного промежутка. Оптическая разность хода и разность фаз зависят от толщины пленки или промежутка; для нормального падения света оптическая разность хода равняется $\Delta = 2dn + \lambda_0/2$ (половина длины волны добавлена, чтобы учесть, что при отражении от оптически более плотной среды фаза волны меняется на π — колебания в отраженной волне происходят в противофазе с падающей). Если толщина меняется, то светлые полосы чередуются с темными. Примером таких полос являются *кольца Ньютона*, возникающие при наблюдении в отраженном свете промежутка между плоской стеклянной пластинкой и лежащей на ней сферической линзой.

Вопрос. Что будет наблюдаться в центре колец Ньютона — темное или светлое пятно?

Ответ. Темное, за счет изменения фазы на π при отражении от границы воздух-стекло.

Тонкие пленки находят различные применения в технике. Наблюдая интерференцию на тонком промежутке между изучаемой поверхностью и очень гладкой эталонной пластинкой, получают информацию о качестве обработки этой поверхности. Покрывая поверхность оптических стекол (линз, призм) тонкой пленкой такой толщины, чтобы отражение заданных длин волн было наименьшим, получают *просветление оптики*.

► **Дифракция света.** Отклонение от прямолинейного распространения волн, огибание волнами препятствий называют *дифракцией*. Дифракция, как и интерференция, присуща любому волновому процессу. Количественную теорию дифракции света построил Френель, который расширил принцип Гюйгенса (см. рис. 78), сформулировав следующее правило: амплитуда волны в произвольной точке пространства представляет собой результат интерференции вторичных волн от воображаемых точечных источников, расположенных на волновом фронте в любой предыдущий момент времени (*принцип Гюйгенса — Френеля*). Дифракция оказывается существенной при размерах отверстий или препятствий, сравнимых с длиной волны. Например, тень от маленького диска содержит светлое пятно в центре, а вокруг видны темные и светлые окружности. Свет, пропущенный через маленькое отверстие, также дает на экране систему концентрических кругов, причем размеры картинок могут заметно превышать размеры отверстия (лучи расходятся).

► **Дифракционная решетка.** На явлении дифракции основано действие *дифракционной решетки*, которая представляет собой большое количество щелей, расположенных на одинаковом

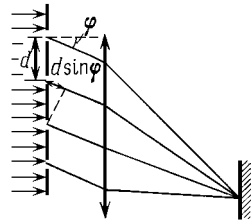


Рис. 85

расстоянии d друг от друга (это расстояние называют *постоянной решетки*). На решетку падает нормально плоская волна, за решеткой ставят линзу, а в фокальной плоскости линзы располагают экран. Каждая щель представляет собой вторичный источник волн; лучи, идущие под углом φ к нормали, собираются линзой в одну точку на экране (рис. 85). Если разность хода между соседними щелями, равная $d \sin \varphi$, кратна

длине волны λ , то все волны усиливают друг друга, и на экране возникает максимум:

$$d \sin \varphi = m \lambda$$

(*условие главного максимума* порядка m для длины волны λ). Если

угол φ чуть-чуть изменить, то условие взаимного усиления всех N щелей нарушится, и максимум исчезнет. Чем больше щелей N содержит решетка, тем более узкими являются главные максимумы. Положение этих узких максимумов зависит от λ , следовательно решетка — хороший *спектральный прибор*: если падающий свет содержит две близкие спектральные линии, то на экране можно увидеть два соответствующих им узких максимума (если N велико, то они не сливаются).

► **Поперечность электромагнитных волн. Поляризация света.** Световые волны являются поперечными: колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Кроме того, в электромагнитной волне $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу.

С поперечностью световых волн связано явление *поляризации*. В естественном свете колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ происходят по всем направлениям, перпендикулярным направлению распространения волны (неполяризованный свет). Однако после прохождения через определенные вещества (например, турмалин) волна оказывается плоскополяризованной, т.е. колебания $\vec{E}$ (и $\vec{B}$) происходят в некотором выделенном направлении. Такие устройства называют *поляризаторами*; поляризатор пропускает волны, в которых колебания вектора $\vec{E}$ лежат в некоторой определенной плоскости, и задерживает волны с перпендикулярной поляризацией. Для проверки того, что свет является поляризованным, после первого поляризатора устанавливают второй. Поворачивая ось второго поляризатора, обнаруживают, что при угле между осями поляризаторов, равном 90° , свет через второй поляризатор не проходит.

§ 3. Теория относительности

► **Постулаты СТО.** *Специальная теория относительности Эйнштейна* (СТО) опирается на два постулата:

Первый постулат (принцип относительности Эйнштейна): все физические законы — как механические, так и электромагнитные — имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета (ИСО). Иными словами, никакими опытами нельзя выделить какую-то одну систему отсчета и назвать именно ее покоящейся. Этот постулат является расширением принципа относительности Галилея на электромагнитные процессы.

Второй постулат Эйнштейна: скорость света в вакууме одинакова для всех ИСО и равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Этот постулат содержит два утверждения: а) скорость света не зависит от скорости источника и б) скорость света не зависит от того, в какой ИСО

находится наблюдатель с приборами, т.е. не зависит от скорости приемника.

Постоянство скорости света и независимость ее от движения источника следуют из уравнений электромагнитного поля Максвелла. Казалось очевидным, что такое утверждение может быть верным только в одной системе отсчета. С точки зрения классических представлений о пространстве-времени, любой другой наблюдатель, двигаясь со скоростью v , должен для встречного луча получить скорость $c+v$, а для испущенного вперед луча — скорость $c-v$. Такой результат означал бы, что уравнения Максвелла выполняются только в одной ИСО, заполненной неподвижным «эфиром», относительно которого и распространяются световые волны. Однако попытка обнаружить изменение скорости света, связанное с движением Земли относительно эфира, дала отрицательный результат (опыт Майкельсона — Морли). Эйнштейн предположил, что уравнения Максвелла, как и все законы физики, имеют один и тот же вид во всех ИСО, т.е. что скорость света в любой ИСО равна c (второй постулат). Это предположение привело к пересмотру основных представлений о пространстве-времени.

► Следствия постулатов СТО.

1. Относительность одновременности. Два события, происходящие в одной ИСО одновременно, но в разных точках пространства, могут быть не одновременными в другой ИСО.

Продемонстрируем, как постулаты СТО приводят к нарушению абсолютного характера понятия одновременности. Предположим, что наблюдатель A находится на длинной неподвижной платформе, наблюдатель B находится в длинном экспрессе, который движется по соседнему пути вправо (см. рис. 86), а наблюдатель C — в другом экспрессе, который движется влево. Каждый наблюдатель имеет множество помощников, которые могут производить измерения с помощью синхронизированных между собой часов. Точно в середине платформы производится вспышка света, и все наблюдатели засекают время двух

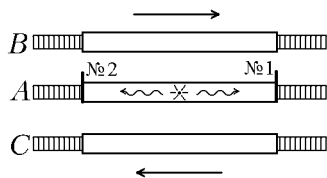


Рис. 86

событий: прихода луча света на детектор №1, расположенный на правом конце платформы, и прихода луча света на детектор №2, расположенный на ее левом конце. Для наблюдателя A детекторы неподвижны, и события №1 и №2 происходят одновременно. С точки зрения наблюдателя B свет распространяется вправо и влево с одинаковой скоростью c (второй постулат СТО), но правый детектор движется в сторону источника (навстречу лучу), а левый — удаляется от источника. Поэтому для наблюдателя B событие №1 происходит раньше, чем событие №2. Рассуждая аналогично, можно убедиться, что с точки зрения наблюдателя C раньше происходит событие №2.

2. Относительность расстояний (сокращение длины).

Длина стежня l_0 , измеренная в ИСО, относительно которой он покоится, больше его длины l , измеренной в ИСО, относительно которой

он движется в продольном направлении со скоростью v :

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Отметим, что для измерения длины движущегося стержня надо произвести одновременное измерение координат его концов.

3. Релятивистский закон сложения скоростей. Пусть система отсчета K_2 движется относительно системы отсчета K_1 со скоростью v так, что оси X этих систем все время совпадают, а оси Y и Z остаются соответственно параллельными. Рассмотрим частицу, скорость которой параллельна оси X . Если скорость частицы относительно K_2 равна v_2 , то ее скорость относительно K_1 равна

$$v_1 = \frac{v + v_2}{1 + (vv_2/c^2)}.$$

Важное свойство этой формулы состоит в том, что если v и v_2 меньше c , то и v_1 будет меньше c . Например, если мы разгоним частицу до $v = 0,9c$, а затем, перейдя в ее систему отсчета, снова разгоним ее до $v_2 = 0,9c$, то результирующая скорость окажется не $1,8c$, а $(1,8c)/1,81 < c$. Видно, что превзойти скорость света не удастся. Скорость света является максимально возможной скоростью движения материи.

Остальные результаты относятся не к кинематике, а к *динамике СТО*.

4. Второй закон Ньютона и импульс в СТО. Второй закон Ньютона следует записывать в виде:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad (4)$$

но *импульс* частицы имеет более сложную зависимость от скорости:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

(Величину $m_p = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ иногда называют (релятивистской) массой, зависящей от скорости, а m — массой покоя.) Из этих уравнений следует уже известное нам свойство: невозможность достичь скорости света. Действительно, при изменении v от нуля до c импульс меняется от нуля до бесконечности. Значит, какого бы значения не достиг импульс $\vec{p}$ под действием силы $\vec{F}$, соответствующая скорость v будет меньше c .

5. Энергия релятивистской частицы. Энергия покоя.

Энергия релятивистской частицы имеет вид

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (5)$$

В СТО остается верным основное соотношение между работой и энергией: работа силы (4) равна изменению энергии (5). Энергия и импульс любой частицы связаны простым соотношением $\vec{p} = E\vec{v}/c^2$, в которое не входит в явном виде масса частицы, и его можно применять к частицам нулевой массы — фотонам. Так как скорость фотона равна c , то связь между E и p имеет вид:

$$E = pc. \quad (6)$$

При $v = 0$ энергия частицы (5) равна энергии покоя $E_0 = mc^2$. Если $v \neq 0$, то к E_0 добавляется кинетическая энергия. При $v \ll c$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots,$$

т.е. при малых скоростях кинетическая энергия имеет такой же вид, как и в ньютоновской механике. В этом проявляется принцип соответствия, верный для всех результатов СТО: при $v \ll c$ они должны переходить в результаты ньютоновской механики.

6. Взаимосвязь массы и энергии. Во взаимодействиях элементарных частиц энергия покоя, которая содержится в любой частице конечной массы, может переходить в другие виды энергии. Например, при аннигиляции электрона и позитрона их энергия покоя переходит в энергию световых квантов. Если кинетическая энергия частиц была мала, то полная энергия фотонов равна $2mc^2$, где m — масса электрона.

При изменении энергии любой покоящейся системы на ΔE_0 ее масса изменится на $\Delta m = \Delta E_0/c^2$. Новая инертная масса будет определять все динамические свойства системы, в том числе при малых скоростях, так как именно она входит в уравнение движения — второй закон Ньютона. Примеры: а) при нагревании тела его масса возрастает; б) масса ядра меньше суммы масс образующих его нуклонов, так как при разделении ядра на нуклоны надо совершить большую положительную работу против ядерных сил.

Связь между энергией покоя E_0 и массой

$$E_0 = mc^2 \quad (7)$$

называют *формулой Эйнштейна*.

Глава 6. Квантовая физика

§ 1. Световые кванты

► **Фотоэффект.** Вырывание электронов из вещества под действием света называют *фотоэффектом*. Для изучения фотоэффекта используют вакуумную лампу с холодным катодом (в этом случае термоэлектронную эмиссию можно не учитывать). Облучая катод светом фиксированной частоты и интенсивности (рис. 87), снимают вольтамперную характеристику лампы (зависимость тока от анодного напряжения). По вольтамперной характеристике (рис. 88) узнают а) число электронов, вырывающихся из катода в единицу времени (оно выражается через ток насыщения: $N = I_{\text{нас}}/e$) и б) максимальную кинетическую энергию вырывающихся электронов; она выражается через *задерживающее напряжение*, т.е. анодное напряжение, при котором ток обращается в ноль:

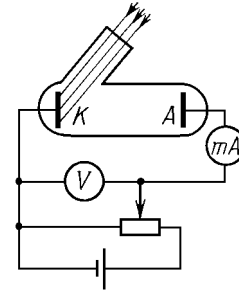


Рис. 87

$$\frac{mv^2}{2} = eU_{\text{зad}}.$$

При этом напряжении даже самые быстрые электроны не могут долететь до анода.

► **Законы фотоэффекта.** Законы фотоэффекта были открыты Столетовым. *Первый закон:* количество электронов, вырывающихся светом из металла в единицу времени, прямо пропорционально интенсивности световой волны. *Второй закон:* максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от интенсивности света. *Третий закон:* если частота света меньше определенной для данного вещества минимальной частоты ν_m , то фотоэффект не наблюдается (*красная граница фотоэффекта*). Экспериментально было обнаружено, что зависимость $eU_{\text{зad}}$ от ν для данного металла имеет вид наклонной прямой, причем наклон прямых, построенных для разных металлов, оказался одинаковым (рис. 89).

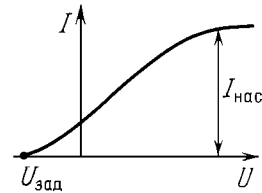


Рис. 88

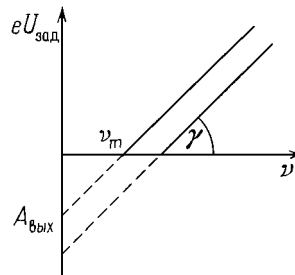


Рис. 89

► **Кванты света.** Объяснение законов фотоэффекта было дано Эйнштейном в 1905 г. Он исходил из гипотезы квантов света, выдвинутой в 1900 г. Планком для объяснения законов теплово-

го излучения: испускание или поглощение света данной частоты происходит порциями — *квантами*. Энергия квантов частоты ν равна

$$\Delta E = h\nu,$$

где $h \approx 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — новая константа, названная *постоянной Планка*. При объяснении фотоэффекта Эйнштейн усилил эту гипотезу, предположив, что кванты света поглощаются целиком отдельными электронами. Это означает, что свет ведет себя аналогично потоку частиц (их назвали *фотонами*) с энергией

$$E_\nu = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}, \quad (1)$$

где $\hbar = h/2\pi$ (аш с чертой). Как любая частица, *квант света* — *фотон* — обладает импульсом (см. формулу (6) главы 6):

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (2)$$

Квантовые свойства света проявляются при испускании, поглощении и рассеянии света. В явлениях, связанных с распространением света, проявляются его волновые свойства. Свет обладает двойственной природой (корпускулярно-волновой дуализм). Такие же свойства проявляют все элементарные частицы.

► **Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.** Поглощая квант света, электрон приобретает энергию $h\nu$. При вылете из металла энергия каждого электрона уменьшается на определенную величину, которую называют *работой выхода*. ($A_{\text{вых}}$ — работа, которую необходимо затратить, чтобы удалить электрон из металла. Работа выхода зависит от рода вещества.) Максимальная энергия электронов после вылета (если нет других потерь) имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} \quad (3)$$

(уравнение Эйнштейна). Если $h\nu < A_{\text{вых}}$, то фотоэффекта не происходит. Значит, *красная граница фотоэффекта* равна

$$\nu_m = \frac{A_{\text{вых}}}{h}.$$

Из (3) видно, что наклон прямых на графике $eU_{\text{зад}}$ от ν (рис. 89) равен h , а отрезок, отсекаемый прямой от оси ординат, равен работе выхода.

Фотоэффект используется при создании фотоэлементов, фотореле и т.д.

Вопрос. Существование работы выхода означает, что на границе металла возникают силы, удерживающие электрон внутри металла. Как объяснить притяжение электрона к электронейтральному металлу?

Ответ. Заряженная частица притягивается наведенными на поверхности проводника зарядами противоположного знака. Сила притяжения вычисляется с помощью метода электростатических изображений (глава 3, стр. 76). Вылетающие и возвращающиеся электроны образуют возле поверхности отрицательно заряженное облако. Между отрицательно заряженным слоем электронов вне металла и положительным наведенным зарядом на его поверхности образуется электрическое поле, напряженность которого направлена наружу.

► **Давление света.** Давление света было предсказано Максвеллом на основе электромагнитной теории и измерено Лебедевым. Установка Лебедева состояла из легкого стержня, подвешенного в вакууме на тонкой нити. По краям стержня были закреплены две тонких пластинки — одна отражающая, другая поглощающая. Освещая пластинки и измеряя закручивание нити, он вычислял световое давление.

Электромагнитная теория давала следующее объяснение световому давлению: электрическое поле электромагнитной волны вызывает в металле ток, на который действует сила Ампера со стороны магнитного поля волны; эта сила направлена в сторону распространения волны и является причиной светового давления. Гораздо проще выглядит объяснение давления на языке световых квантов: фотоны, каждый из которых обладает импульсом (2), поглощаются или отражаются, передавая свой импульс веществу. При отражении фотона переданный импульс в два раза больше, чем при поглощении.

§ 2. Атом и атомное ядро

► **Опыты Резерфорда.** *Опыты Резерфорда* сыграли решающую роль в формировании ядерной модели атома. Цель опытов: выяснить распределение в атоме положительного заряда, в котором заключена почти вся масса атома (кроме массы электронов). Постановка эксперимента: бомбардировка α -частицами атомов тяжелых элементов (α -частицы — ядра атомов гелия, излучаемые в радиоактивном распаде с энергией в несколько МэВ). Главный качественный результат: обнаружены единичные случаи рассеяния α -частиц назад (на углы больше 90°). Анализ: если бы α -частица налетала на тяжелый точечный заряд q , то точку разворота ($v_\alpha = 0$) можно было бы найти из закона сохранения энергии: $m_\alpha v_\alpha^2/2 = kq_\alpha q/R_{\text{ост}}$. Подсчет показывает, что $R_{\text{ост}} \sim 10^{-12}$ см. Такой же результат — отражение в точке $r = R_{\text{ост}}$ — останется в силе, если положительный заряд размазан по шарiku радиусом $R < R_{\text{ост}}$. Если же размеры области положительного заряда заметно превышают $R_{\text{ост}}$, то α -частица проникает в эту область, сила

отталкивания уменьшается (внешние слои не создают напряженности — см. § 1 гл. 3), и отражения не происходит. Вывод: положительный заряд атома и почти вся его масса сконцентрированы в области размерами менее 10^{-12} см, что в десятки тысяч раз меньше размеров атома (10^{-8} см); эту область называют *ядром атома*.

► **Ядерная (планетарная) модель атома.** В атоме с порядковым номером Z заряд ядра равен Ze ; вокруг ядра по различным орбитам вращается Z электронов. Радиусом атома называют радиус орбиты внешних электронов. Главная трудность такой *планетарной модели атома* (модель Резерфорда) состоит в том, что при движении с ускорением электрон должен непрерывно излучать электромагнитные волны; расчет показывает, что за время 10^{-8} с электрон должен потерять всю энергию и упасть на ядро.

► **Квантовые постулаты Бора.**

1. Атомная система может находиться в особых *стационарных*, или квантовых, *состояниях*, каждому из которых соответствует определенная энергия E_n . В стационарных состояниях атом не излучает.

2. *Излучение света* происходит при переходе атома из состояния с большей энергией E_k в состояние с меньшей энергией E_n . Энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний (см. (1)):

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n.$$

► **Модель Бора для атома водорода.** Электрон, движущийся по круговой орбите, подчиняется второму закону Ньютона:

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$$

(v^2/r — центростремительное ускорение, ke^2/r^2 — сила кулоновского притяжения электрона к ядру). Для определения разрешенных орбит Бор ввел еще один постулат — *правило квантования*:

$$mvr = n\hbar,$$

где n — номер орбиты, $\hbar = h/2\pi$. Решая эти уравнения, находим радиус n -й орбиты r_n и скорость электрона на этой орбите v_n :

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2}, \quad v_n = \frac{ke^2}{n\hbar}.$$

Энергия электрона на n -й орбите есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - k \frac{e^2}{r_n}.$$

Подставляя сюда r_n и v_n , получаем

$$E_n = -\frac{m(k\epsilon^2)^2}{2\hbar^2 n^2}.$$

Состояние с наименьшей энергией ($n = 1$) называют *основным*, остальные состояния называют *возбужденными*. Энергия основного состояния E_1 и радиус орбиты электрона в этом состоянии (радиус атома водорода) равны

$$E_1 = -\frac{m(k\epsilon^2)^2}{2\hbar^2} \approx -21,7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ},$$

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{m k \epsilon^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Чтобы ионизовать атом в основном состоянии, электрону надо сообщить энергию $|E_1|$; эту энергию называют *энергией ионизации*.

Для частоты излученного света получаем:

$$\nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{h} = \frac{m(k\epsilon^2)^2}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = R_\nu \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

где $R_\nu = m(k\epsilon^2)^2/(4\pi\hbar^3)$ называют *постоянной Ридберга* (для частоты). Часто используют формулу:

$$\frac{1}{\lambda_{kn}} = R_\lambda \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

где $R_\lambda = R_\nu/c = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ — постоянная Ридберга для обратной длины волны. В видимой части спектра наблюдаются линии, соответствующие переходам с уровней 3, 4, 5 и 6 на уровень 2, т.е. четыре линии из так называемой серии Бальмера. При поглощении фотона атом переходит в стационарное состояние с большей энергией.

► **Лазеры.** Лазеры используются для получения когерентных световых пучков высокого качества. Действие лазера основано на явлении *индуцированного излучения* (рассмотренного Эйнштейном), т.е. на излучении атомом кванта света под действием падающего света. Самопроизвольное излучение возбужденного атома без внешнего воздействия называют *спонтанным*. Световой квант, возникший при индуцированном излучении, имеет такую же частоту, фазу и поляризацию, как и падающий (падающий и излученный свет когерентны). Однако фотоны не только вызывают индуцированное излучение возбужденных атомов, но и поглощаются невозмущенными

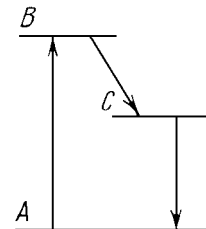


Рис. 90

атомами. Чтобы число квантов возрастало, возбужденных атомов должно быть больше, чем невозбужденных (инверсная заселенность уровней). В рубиновом лазере инверсная заселенность создается с помощью трехуровневой системы, т.е. атомы переводят из невозмущенного состояния A (см. рис. 90) в состояние B с малым временем жизни, после чего часть атомов переходит не обратно в A , а в долгоживущее состояние C . Когда атомов C станет больше, чем атомов A , на переходе из C в A начинает работать лазер.

► **Состав ядра атома.** Ядро состоит из *протонов* (заряд $+e$, масса $m_p \approx 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг) и *нейтронов* (заряд равен нулю, масса $m_n \approx 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг). Заряд ядра равен Ze , где Z — число протонов. Массовое число A равно полному числу частиц в ядре: $A = Z + N$, где N — число нейтронов. *Нуклоны* (протоны и нейтроны) удерживаются в ядре короткодействующими силами большой величины — ядерными силами. При малых A наиболее устойчивы ядра с $N = Z$, при больших A число нейтронов N заметно превышает число протонов. Для обозначения ядер используют запись: A_ZX .

Изотопами называют ядра, имеющие одинаковый заряд, но различную массу. Изотопы есть у всех элементов; вещество представляет собой смесь изотопов в определенной пропорции. У некоторых ядер есть только один стабильный изотоп, а остальные — радиоактивные; начиная с полония ($Z = 84$), все изотопы элементов радиоактивны. Пример. Изотопы водорода: стабильный дейтерий ${}^2_1\text{H}$ и β -радиоактивный тритий ${}^3_1\text{H}$.

► **Радиоактивность.** Радиоактивность — испускание ядрами некоторых элементов различных частиц (α -частиц, электронов, γ -квантов), сопровождающееся переходом ядра в другое состояние и изменением его параметров. Момент времени, когда такое превращение испытает данное ядро, непредсказуем; однако каждую секунду распадается определенная доля ядер. Число распадов в единицу времени называют *активностью*. Время $T_{1/2}$, через которое распадется половина ядер (и, соответственно, активность упадет в 2 раза), называют *периодом полураспада*. Закон радиоактивного распада дает количество нераспавшихся ядер N от времени:

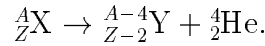
$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

(при $t = T_{1/2}$ получаем $N = N_0/2$). Для урана $T_{1/2} \approx 4,5$ млрд. лет, для радия $T_{1/2} \approx 1600$ лет; поэтому радий на Земле давно распался, и его можно получать только искусственно.

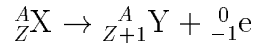
► **Виды радиоактивного распада.**

1. **Альфа-распад.** α -распад представляет собой излучение α -частиц (ядер гелия ${}^4_2\text{He}$) высокой энергии. Масса ядра уменьшается

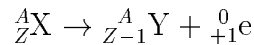
на 4 единицы, а заряд (порядковый номер элемента) — на 2 единицы (правило смещения):



2. Бета-распад. β^- -распад — излучение электрона:



и β^+ -распад — излучение позитрона:



(позитрон — античастица электрона — имеет такую же массу m_e , но положительный заряд $+e$). Порядковый номер ядра изменяется на единицу, массовое число не изменяется.

3. Гамма-излучение. γ -излучение представляет собой испущенные возбужденным ядром кванты света высокой частоты (γ -кванты). Параметры ядра при γ -излучении не меняются, ядро лишь переходит в состояние с меньшей энергией.

Распавшееся ядро обычно тоже радиоактивно, т.е. происходит цепочка последовательных радиоактивных превращений. Радиоактивное излучение обычно представляет собой смесь всех трех видов излучений.

► **Методы наблюдения и регистрации заряженных частиц.** Большинство методов основано на использовании систем в долгоживущем неустойчивом состоянии, в которых под действием пролетающей заряженной частицы происходит переход в устойчивое состояние.

Счетчик Гейгера основан на ударной ионизации газа; он фиксирует только факт пролета частицы.

В *камере Вильсона* используется пересыщенный пар. Камера фиксирует траекторию заряженной частицы: вдоль траектории возникают ионы, на которых конденсируются капельки жидкости.

Пузырьковая камера содержит перегретую жидкость. Ионы, возникающие вдоль траектории частицы, провоцируют образование мельчайших пузырьков пара. Частицы хорошо тормозятся жидкостью, что позволяет наблюдать несколько последовательных реакций.

В *толстослойных фотоэмульсиях* пролетающие частицы образуют скрытое изображение. После проявления видны все события, происшедшие за время наблюдения.

► **Энергия связи ядра.** Энергией связи называют работу, которую надо совершить для разделения ядра на нуклоны. Энергию связи можно найти, измерив достаточно точно массу ядра $m_{\text{я}}$. В

соответствии с формулой Эйнштейна (формула (7) гл. 6) для связи между массой и энергией, энергия связи равна:

$$\Delta E_{\text{св}} = E_{\text{нуклонов}} - E_{\text{ядра}} = (Zm_p + Nm_n)c^2 - m_{\text{я}}c^2.$$

Эксперимент подтверждает существование *дефекта масс*: масса ядра всегда меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Энергия связи велика; например, при образовании 4 г гелия выделяется столько же энергии, сколько при сгорании шести вагонов каменного угля. Удельная энергия связи (т.е. энергия связи в расчете на один нуклон) с увеличением массового числа A сначала возрастает, потом остается примерно постоянной (8—9 МэВ на нуклон), а при $A > 60$ снова уменьшается. Это означает, что как при делении тяжелого ядра на две части, так и при соединении двух легких ядер должна выделяться энергия.

► **Ядерные реакции.** Ядерные реакции — изменения ядер, происходящие в результате их взаимодействий с элементарными частицами и друг с другом. Для воздействия на ядра используют как заряженные частицы большой энергии, полученные в радиоактивном распаде и на ускорителях, так и нейтроны. Нейтроны не отталкиваются кулоновским полем ядра, поэтому им не нужно придавать большую энергию; во многих случаях медленные (тепловые) нейтроны оказываются даже эффективнее.

► **Реакция деления.** Захватывая нейтрон, ядро урана может разделиться на два осколка; в процессе деления вылетают также два-три нейтрона (в больших ядрах доля нейтронов больше, чем в средних). Выделение энергии при одном акте деления составляет около 200 МэВ (примерно 1 МэВ на нуклон); именно на столько энергия связи урана меньше суммы энергий связи осколков. Объяснение процессу деления дает капельная модель ядра. Захватывая нейтрон, ядро переходит в возбужденное состояние и деформируется, что облегчает разрыв «капли» на два осколка (в результате кулоновского отталкивания частей ядра).

► **Цепная реакция. Реакторы.** Так как вылетевшие нейтроны могут, в свою очередь, привести к делению других ядер урана, то возможно возникновение *цепной* (самоподдерживающейся) *реакции*. Для поддержания реакции надо, чтобы *коэффициент размножения нейтронов* K был больше или равен 1. (Коэффициентом размножения называют отношение числа нейтронов в некотором «поколении» к числу нейтронов в предыдущем поколении.) Естественный уран содержит лишь 0,7% изотопа $^{235}_{92}\text{U}$, который делится при захвате любых нейтронов — как медленных, так и быстрых. Остальная часть приходится на долю изотопа $^{238}_{92}\text{U}$, который захва-

тывает только быстрые нейтроны, но в четырех случаях из пяти не делится. Поэтому есть два пути для создания цепной реакции: либо очищать уран, увеличивая процентное содержание $^{235}_{92}\text{U}$, либо замедлять вылетающие нейтроны. Первый путь используется в атомной бомбе и в реакторе на быстрых нейтронах. Второй путь используется в обычных реакторах. Замедлители изготавливают из тяжелой или обычной воды, графита и т.д. Необходимо также учитывать, что при малых размерах активной зоны, содержащей уран, слишком много нейтронов уходит наружу через границу, и цепная реакция не идет. Значит, масса урана должна превышать некоторую *критическую массу*. Например, критическая масса чистого $^{235}_{92}\text{U}$ составляет примерно 50 кг. Для *управления реакцией* используют стержни из кадмия или бора, хорошо поглощающих нейтроны. Вдвигая стержни в реактор, останавливают реакцию.

► **Реакция синтеза.** *Термоядерный синтез* — реакция слияния двух легких ядер. Энергия связи конечного ядра больше суммы энергий связи исходных ядер, т.е. при слиянии ядер должна выделяться энергия. Например, в реакции $^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$ выделяется энергия 17,6 МэВ (т.е. 3,5 МэВ на нуклон). Главная трудность — ядра необходимо привести в контакт, т.е. сблизить до расстояния 10^{-12} см, чему препятствует сила кулоновского отталкивания. Для преодоления сил отталкивания вещество необходимо разогреть до сотен миллионов градусов. Чтобы сделать термоядерный синтез управляемым, надо решить задачу удержания такой раскаленной плазмы магнитным полем; пока эта задача не решена. Термоядерный синтез служит источником энергии звезд (в том числе Солнца). *Неуправляемая термоядерная реакция* происходит при взрыве *водородной бомбы*, где для достижения необходимых температур используют взрыв *атомной бомбы*.

► **Измерение дозы излучения.** *Поглощенная доза излучения* определяется как энергия, поглощенная единицей массы, и выражается в *греях* ($1 \text{ Гр} = \text{Дж/кг}$). Для характеристики рентгеновского и гамма-излучения по производимой ими ионизации сухого воздуха вводится *экспозиционная доза излучения*, равная сумме зарядов всех ионов одного знака, образующихся под действием электронов, возникших в облучаемом воздухе массой 1 кг (выражается в Кл/кг или в *рентгенах*: $1 \text{ рентген} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$).

Чтобы оценить биологическое воздействие излучения на живой организм, вводят *коэффициент качества излучения* Q , который показывает, во сколько раз данное излучение опаснее, чем рентгеновское, при одинаковых поглощенных дозах. Для бета-излучения $Q = 1$, для протонов с энергией меньше 10 МэВ $Q = 10$, для тепловых нейтронов с энергией меньше 20 кэВ $Q = 3$, а для нейтронов с энергией 0,5–10 МэВ $Q = 10$, для альфа-излучения с энергией меньше 10 МэВ $Q = 20$, для тяжелых ядер $Q = 20$. *Эквивалентная доза излучения* равна произведению поглощенной дозы на коэффициент качества. Она выражается в *зивертах* (1 Зв равен одному грею при $Q = 1$). Используется также *бэр* (биологический эквивалент рентгена): $1 \text{ бэр} = 0,01 \text{ Зв}$.